Geometría Analítica

con Aplicaciones usando Software Dinámico

Jorge Hernán Aristizábal Zapata
Edgar Javier Carmona Suarez

GeometríaAnalítica

14 de diciembre de 2010

Jorge Hernán Aristizábal Zapata.
Licenciado en Matemáticas y Computación (Universidad del Quindío)
Magíster en Educación
(Universidad Católica de Manizales).
Edgar Javier Carmona Suárez.
Ingeniero de Sistemas
(Universidad Inca de Colombia)
Magíster en Ciencias de la Computación
(Instituto Tecnológico de Costa Rica)
Doctor en Tecnologías de la Información
(Universidad de las Palmas de Gran Canaria -España).

Reproducido y Editado
Ediciones Elizcom

Armenia,Quindio
2010

Diagramación en LATEX: Jorge Hernán Aristizábal Z. Diseño

Carátula: Jorge Hernán Aristizábal Z. A mi Abuela, madre y esposa, que en su momento me han apoyado para seguir adelante.
Jhaz
A mis hijos, la razón de ser. Edgar Javier

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a los estudiantes participantes en los cursos de Geometría Analítica, cuya retroalimentacón nos ayudó a depurar el presente libro.

A nuestras esposas por escuchar nuestras ideas y apoyarnos en la lectura y sugerencias.

Al Grupo Gedes[1]

[1]Grupo de Estudio y Desarrollo de Software (Universidad del Quindío).

INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica proporciona herramientas para tratar múltiples problemas en las ingenierías, puesto que debe indagar sobre las ecuaciones que corresponden a curvas definidas por alguna propiedad.

En un curso de Geometría Analítica, se dedica buen tiempo a la solución de ejercicios, dejando las aplicaciones que son de gran utilidad al final del curso. Este libro, por el contrario, está diseñado con material apropiado donde se mezcla la intuición, el rigor y los problemas de aplicación en cada capítulo.

En el desarrollo de este libro se encontrarán:

Problemas de aplicación

Los problemas de aplicación que se proponen en este libro, han sido elaborados a partir de notas de clase de Geometría Analitíca y el desarrollo del mismo, impartido en los diferentes programas de la Facultad de Ingeniería en la Universidad del Quindío, muchos de ellos son creación propia y otros son parte del acervo matemático común.

Cuestionario

El libro tiene en la parte final de cada capítulo un cuestionario que se constituye en pruebas académicas de selección múltiple con única respuesta, las cuales constan de un enunciado y cuatro (4) opciones de respuesta, identificadas con las letras: A, B, C, y D, de las cuales una sola de las opciones responde correctamente al enunciado. Software educativo

Hoy día, el uso de tecnologías de la información y la comunicación son de gran valor para el desarrollo de las sociedades actuales en relación con lo económico, lo cultural, el uso del tiempo libre, lo político y en lo educativo; por tal motivo, se plantean ejercicios en los cuales deban explorar, hacer prácticas y experimentar construcciones con ayuda de material educativo computarizado, que sirva de apoyo al desarrollo de los temas, en este caso se trara del GeoGebra.

Actividades con software

Son Actividades para realizar construcciones con software de Geometría Dinámica

Prácticas

Son Actividades en las cuales se debe confrontar lo aprendido, a través de algún tipo de ejercitador.

CONTENIDO DEL CD

El presente libro incluye un CD adjunto, en donde encontrará:

– Archivos que servirán de complemento y apoyo al libro en formato pdf (se recomienda la versión 8 de Acrobat Reader).
– Software educativo gratuito que servirá de apoyo para hacer demostraciones, prácticas y construcciones (Licencia GNU).
– Aplicaciones en java que sirven de práctica (se debe tener instalado el java runtime) .

CAPÍTULO1

GENERALIDADES

1.1. Software educativo

Por software educativo, se puede considerar el conjunto de recursos informáticos diseñados con la intención de ser utilizados en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Se caracterizan por ser altamente interactivos, a partir del empleo de recursos multimedia como videos, sonidos, fotografías, diccionarios especializados, explicaciones de experimentados profesores, ejercicios y juegos instructivos, que apoyan las funciones de evaluación y diagnóstico[1].

El software educativo puede ser transversal a los contenidos del currículo (Matemáticas, Ciencias, Idiomas, Geografía, Dibujo, entre otros), de formas diversas, dependiendo de la necesidad del maestro, por ejemplo: cuestionarios, simuladores, ejercitadores, graficadores, entre otros, que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma estructurada, ya que el software educativo puede ofrecer un entorno amigable e interactivo de trabajo para los estudiantes.

Para la enseñanza y la práctica de las matemáticas se han utilizado diferentes programas, algunos de uso general y otros diseñados para el trabajo en áreas específicas. El nivel de complejidad de los programas va desde sencillas calculadoras, hasta ambientes integrados CAS (Sistemas de Álgebra Computacional) los cuales permiten cálculos simbólicos y numéricos, al igual que representaciones simbólicas, de visualización y construcción de modelos matemáticos DGS (Sistemas de Geometría Dinámica), dado que los objetos tienen una representación dinámica a

[1]http://publicalpha.com/%C2%BFque-es-el-software-educativo/

través de una ventana gráfica.

Podemos citar entre otros programas el Derive, Mathlab, Mapple y Mathematica en el caso de CAS y el Cabri, Regla y Compás, Sketchpad y Geogebra para el caso de los DGS.

El uso de materiales educativos computarizados (Mec) en la enseñanza de las matemáticas juega un papel decisivo a la hora de cubrir las expectativas planteadas, permitiendo que el estudiante tenga una nueva visión de las situaciones propuestas y se sienta partícipe de su propio aprendizaje.

1.2. La geometría y las Tic

Las tecnologías de la información y la comunicación, conocidas en forma simplificada como Tic agrupan un conjunto de técnicas e instrumentos, principalmente internet, informática y telecomunicaciones, que facilitan el intercambio de información.

Las Tic constituyen una herramienta de acercamiento, motivación y de responsabilidad al conocimiento, siempre y cuando exista una selección crítica de la información, conveniente para el

proceso de enseñanza
– aprendizaje, de lo contrario el valor de las Tic resulta insulso y adictivo a otras actividades para nada provechosas[2], las Tic como instrumentos para hacer más agradable la vida, han incursionado en todas las disciplinas del saber humano y la educación no ha sido ajena a su utilización. Es así como modernamente encontramos diferentes usos en procesos administrativos, didácticos y pedagógicos.

El uso de calculadoras, materiales educativos computarizados, cursos virtuales y páginas web son algunas de las formas como son utilizadas, para facilitar el aprendizaje de todas las disciplinas, incluidas las matemáticas y la geometría en particular.

Las calculadoras y computadores han impactado sobre las prácticas cotidianas, pero se nota más el impacto epistemológico (Balacheff & Kaput, 1996), esto se debe fundamentalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos y a las relaciones entre ellos que el estudiante puede activar en los entornos interactivos computacionales; esto permite una forma de actividad mucho más directa que la posible anteriormente. Este nuevo realismo matemático, hace indispensable la extensión de la transposición didáctica a los contextos computacionales, dando lugar a

[2] Aristizábal Z. Jorge H, Potencialidad y movilidad del conocimiento desde las comunidades virtuales como horizontes emergentes de con-formación del sujeto implicado, U.C.M, 2009. pg. 70

una transposición informática (Balacheff, 1994).

La Geometría Analítica ha tenido gran importancia en el desarrollo de las matemáticas, unificando los conceptos de análisis (relaciones numéricas) y de geometría (relaciones espaciales). La geometría analítica se ocupa de dos tipos clásicos de problemas:

a. Dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebráica que satisface dichos puntos.

b. Dada una expresión algebráica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión.

En el aula convencional, sólo es posible explorar un número limitado de problemas, pues los desarrollos algebráicos o el cálculo de tabulaciones suelen ser exhaustivos. Con el apoyo de software, estas exploraciones pueden hacerse más ágiles e incluso elevar el nivel de complejidad de los planteamientos de los problemas.

El software de Geometría Dinámica posee herramientas gráficas e interactivas, que permiten definir y manipular expresiones matemáticas que representan figuras geométricas, derivadas de la ecuación general de segundo grado.

Existen varios programas de Geometría, aunque son similares, cada uno tiene características particulares:

Cabri-Geometre . Es el más antiguo y por ello tiene la ventaja de tener el mayor número de desarrollos efectuados por usuarios, está incluido en algunas calculadoras gráficas de Texas Instruments. Es sin duda el más utilizado, aunque tiene algunos fallos de continuidad debido a su codificación interna, su página web es http://www.cabri.com/.

GeoGebra . Programa muy similar a Cabri en cuanto a instrumentos y posibilidades, pero incorpora elementos algebráicos y de cálculo, es decir, la integración de DGS y CAS. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebráica que corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Desarrollado por Markus Hohenwarter, Es un programa libre y gratuito, con licencia GNU (General Public License), su página web es http://www.geogebra.org.

Sketchpad. Es tan antiguo como Cabri y con gran difusión en Estados Unidos. Tiene todas las cualidades de Cabri y además cuenta con posibilidades de tratamiento y estudio de funciones, lo que permite ser utilizado también en temas distintos de los estrictamente geométricos, su página web es http://www.dynamicgeometry.com/

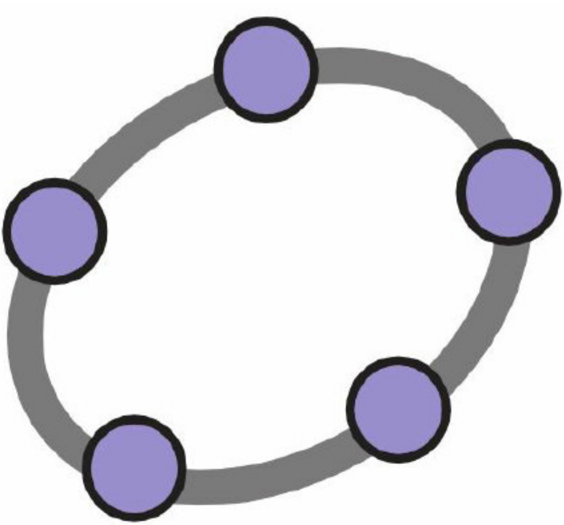
Cinderella . Tiene la ventaja de estar programado en Java, posee potentes algorítmos, utilizando geometría proyectiva compleja, un comprobador automático de resultados y la posibilidad de realizar construcciones y visualizar en geometría esférica e hiperbólica. Por el lado negativo no admite "macros", pequeñas construcciones auxiliares que son de utilidad, su página web es http://www.cinderella.de/tiki-index.php

R y C (Regla y Compás), también está programado en Java, traducido al castellano; tiene la ventaja de ser de libre uso y gratuito. Permite la exportación de ficheros a formato html para visualizarlos con cualquier navegador. Tiene presentaciones similares a Cinderella o Cabri aunque es menos versátil.

GEUP. Está programado por el español Ramón Álvarez Galván. Se puede descargar desde la página www.geup.net.

WinGeom . Otro excelente programa geométrico que no tiene nada que envidiar a los programas comerciales. Permite trabajar con herramientas de construcción y medida, tanto en el plano como en el espacio. Incorpora la posibilidad de trabajar con geometría esférica e hiperbólica. Forma parte de un conjunto de distintos programas conocidos con el nombre de "Peanut Software" desarrollado por Rick Parris de la Phillips Exeter Academy Mathematics Department de Exeter. Su página web es http://math.exeter.edu/rparris/.

1.3. Software de geometría dinámica



GeoGebra, según sus propios autores[3], es un software interactivo de matemáticas, diseñado para permitir la realización de construcciones de geometría, álgebra y cálculo, tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori, pueden modificarse dinámicamente.

[3] Markus Hohenwarter y un equipo de trabajo en el instituto Geogebra que tiene sedes en todo el mundo. En Colombia lo

representa el Grupo GNOMON de Medellín que está bajo la responsabilidad académica del grupo de investigación en didácticas matemáticas, básicas y aplicadas del Instituto Tecnológico Metropolitano.

1.3.1. Uso del GeoGebra

GeoGebra es un software de matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo (CAS+DGS) con la capacidad de realizar una amplia variedad de gráficos en dos dimensiones. Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica y por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas de los objetos directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables dependientes vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como Raíces o Extremos, al igual que se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente.

1.3.2. Instalación

Geogebra en su página web, http://www.geogebra.org, ofrece tres formas diferentes para instalar el software en la opción de descargas, las cuales son:

. Descargar e instalar

En esta opción se puede descargar un archivo de instalación y luego ejecutarlo, tiene la ventaja de transportarse en una USB e instalarlo en varios equipos.

. Localmente

Esta instalación es directa en el computador, pues no descarga ningún archivo; necesita de internet para instalarla.

. Webstart

Esta opción no instala ningún archivo en el computador, por lo tanto, cuando reinicie su equipo él no estará instalado, la desventaja es que necesita estar conectado a internet para poder funcionar.

Después del proceso de instalación, puede ejecutarlo desde la opción Inicio, Geogebra. Si la instalación y ejecución fue exitosa, debe aparecer una ventana principal como la que se aprecia a continuación:

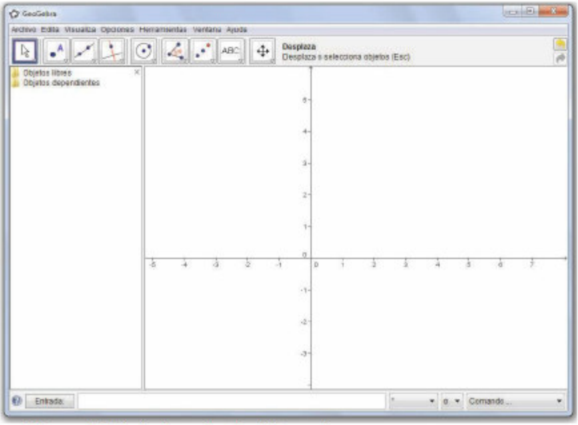


Figura 1.1: Interfaz principal Geogebra.

Esta interfaz principal está dividida en 5 bloques en los que se pueden destacar varios aspectos como:

Barra de menús

Figura 1.2: Barra de Menús.

Esta barra de menú está situada en la parte superior de la pantalla y muestra una lista de comandos, referentes a la aplicación, según el menú en el que se encuentre.

Si es necesario, se puede sacar una hoja de cálculo para el manejo de datos desde la barra de menú.

Barra de herramientas

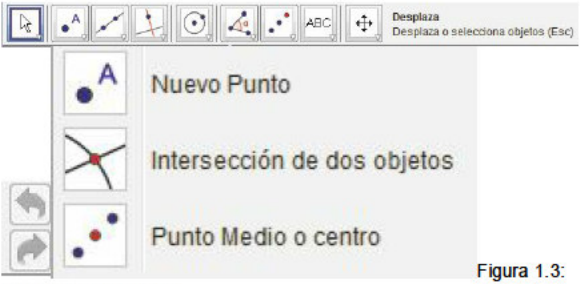


Figura 1.3: Barra de Heramientas.

También conocida como barra de botones, es una barra que contiene imágenes de los comandos de acceso rápido como crear un punto, una línea y demás objetos; cada botón agrupa elementos similares; para desplegar dichos elementos, se hace clic en el triángulo inferior derecho de cada botón.

Zona gráfica

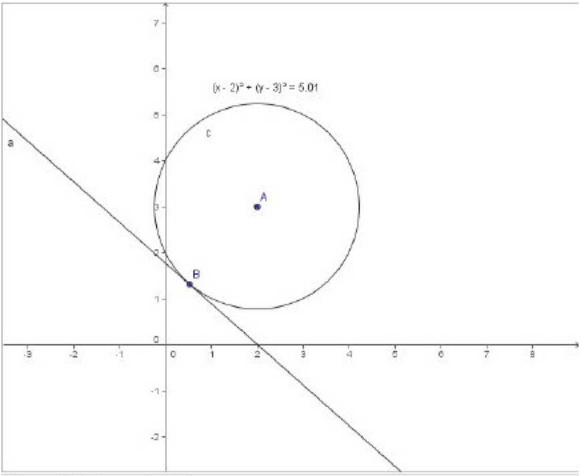


Figura 1.4: Zona Gráfica.

En esta parte nos muestra un plano cartesiano al cual se le pueden cambiar la unidad de medida de los ejes u ocultarlos, también aprarece el gráfico de los objetos que hemos creado, por ejemplo: el punto A, la circunferencia y la recta que pasa el punto A, también tiene la opción de trabajar con cuadrícula, para ello se hace clic en el menú vista y seleccionando la opción cuadrícula.

Panel de objetos

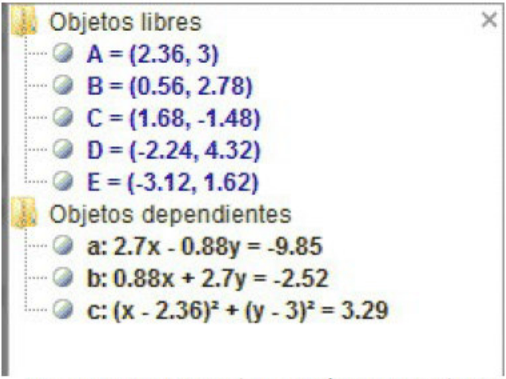


Figura 1.5: Panel de objetos. También llamada vista algebráica. Este panel agrupa todos los objetos que se van incluyendo en la aplicación, aunque no estén visibles en la zona gráfica, estos objetos están diferenciados en objetos libres, los cuales se pueden manipular y los objetos dependientes que se trasforman en la medida que se manipule un objeto libre. Este panel se puede ocultar dependiendo de la necesidad, haciendo clic en el menú vista y seleccionando la opción vista algebráica.

Barra de argumentos

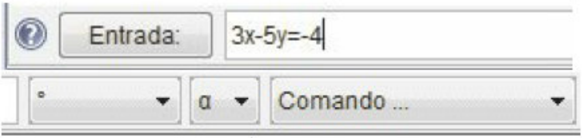


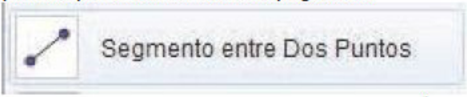
Figura 1.6: Barra de Argumentos.

En esta barra, podemos introducir ecuaciones de objetos como puntos, líneas, circunferencias y vectores, entre otros, con los que se desea trabajar, después de dar enter, estos se dibujan en la zona gráfica y se representan como objetos (dependientes o independientes) en el panel correspondiente. En el extremo derecho de esta barra hay tres menús desplegables: potencias, funciones especiales y cuantificadores; ángulos y comandos de los objetos.

Actividad

con Software[1]

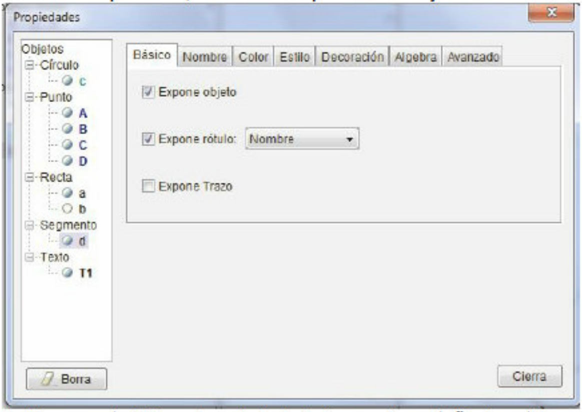
1. Con la herramienta segmentos entre dos puntos, que está en el menú desplegable del



botón recta entre dos puntos, cree un polígono[4] de 5 lados, para ello dé clic en dicho botón y haga clic por cada punto (vértice) en la zona gráfica.

[4]Es una figura geométrica cerrada, conformada por segmentos consecutivos no alíneados.

2. Ubique el puntero del ratón en el segmento AB, dé clic derecho y seleccione la opción propiedades, que mostrará una ventana con una serie de pestañas, seleccione la pestaña color y cámbielo.



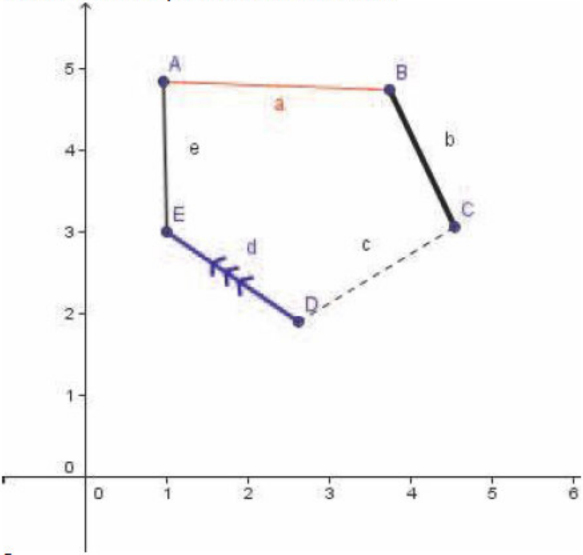
3. Al segmento BC, en "propiedades", busque la pestaña de estilo y cambie el grosor[5].

4. Al segmento CD en la pestaña "estilo" cambiamos el estilo de trazado.

5. Al segmento DE en la pestaña "decoración" colóquele 3 flechas.

Al terminar esta actividad usted obtendrá un gráfico similar a éste.

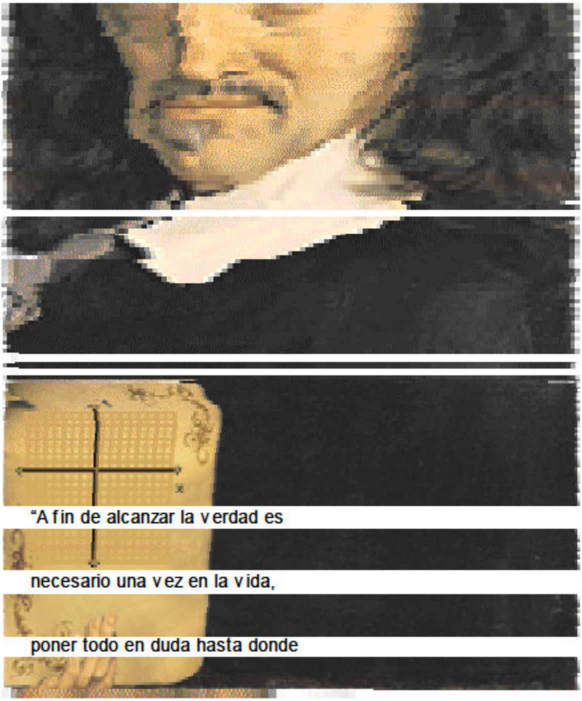
En la evolución de este libro, se iran desarrollando otras activ idades en las que se utilice este sof tware.



[5]No se necesita cerrar la v entana de propiedades para cambiar la propiedad a otro objeto, basta con tocar el objeto a cambiar.

CAPÍTULO2

CONCEPTOS BÁSICOS



"A fin de alcanzar la verdad es

necesario una vez en la vida,

poner todo en duda hasta donde

sea posible" .

René Descartes.

En este capítulo se expondrán los fundamentos de la Geometría Analítica, que darán soporte a las próximas unidades, tales como: el plano cartesiano, la línea recta y el triángulo.

25

2.1. Recta real

Una recta real o numérica es una recta horizontal que se extiende indefinidamente, en ella se fija un punto O llamado origen y se ubican los números reales,[1] los cuales están ordenados para medir

distancias.
Reales Positivos
−
6−5−4−3−2−1 **0** 1 2 3 4 5 6 Reales Negativos
Figura 2.1: Recta real.

2.1.1. Distancia en la recta real

La distancia lineal entre dos valores x_1 y x_2 cualesquiera, ubicados en la recta real es el valor absoluto[2] de la diferencia entre ambos valores.
−
3.0−1.5 **0** 1.5 3.0 4.5 6.0
X_1 X_2 Distancia $|X_2 - X_1|$
Figura 2.2: Distancia en la Recta real
La anterior gráfica muestra que una distancia no puede ser negativa, entonces la distancia lineal entre dos (2) valores está dado por:
$| x_2 - x_1 |$
Ejemplo
Sean $x_1 = -2$ y $x_2 = 7$ encontrar la distancia lineal entre estos 2 valores.
[1]Los números reales comprenden: los enteros, los racionales e irracionales, bien sean positivos a la derecha del cero y/o negativos a la izquierda del cero. [2]Valor absoluto de un número real x se define como $| x | = x$ si $x \geq 0$ x si $x < 0$−
Solución
$d = | 7 - (-2) |$ $d = | 7 + 2 |$
$d = | 9 | = 9$
Distancia = 9 −3−2−1 **0** 1 2 3 4 5 6 7

2.2. Plano cartesiano

Un plano cartesiano[3] está formado por dos (2) rectas reales, una horizontal y otra vertical que se extienden indefinidamente; la recta horizontal recibe el nombre de eje x o eje de las abcisas y la recta vertical recibe el nombre de eje y o eje de las ordenadas. La intersección de ambos ejes se denomina origen O.

Como se observa, el plano queda dividido en cuatro (4) cuadrantes, los cuales se enumeran en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Sobre cada uno de los ejes se marcan div isiones igualmente espaciadas, que corresponden a números enteros positiv os si están a la derecha y arriba del origen, y enteros negativ os si están a la izquierda o abajo del origen, aunque la escala entre el mismo eje debe ser igual, entre ejes puede cambiar.

3 Eje y

Cuadrante II 2 Cuadrante I (-,+) (+,+) 1

Origen Eje x 3 −2 −1 1 2 3 − 1 −

Cuadrante III 2 Cuadrante IV (-,-) ¯ (+,-) Figura 2.3: Plano cartesiano.

[3] También conocido como sistema coordenado rectangular

2.2.1. Coordenadas en el plano

Para localizar cualquier punto P en el plano cartesiano, se necesita de dos números llamados “pareja ordenada” (abscisa y ordenada); para ello, primero se hace un desplazamiento horizontal (eje x) y luego v ertical (eje y) partiendo del origen, por tal motiv o, un punto en el plano tiene como coordenada P (x, y) .

Ejemplo

Ubicar los siguientes puntos

A

=

3

,

7 ; B = (−1, 4) ; C =−4, 3 −2 y D = (5,−1), en el plano cartesiano. 2

Solución

(

B 4) Eje y

−1, A 3, 7 4 2

3

2

1 Eje x

−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 − 1 D C

−

4

,

3

−2 −2 (5,−1)

Práctica No. 1

En el Cd busque la carpeta Apples, abra el archivo buscarpunto.html y realice la actividad "Buscar punto".

Actividad No. 1

En la siguiente tabla se dan una serie de coordenas en el plano, que al unirlas forman una figura. Descubra la figura, de tal manera que inicie una nueva línea para cada grupo de pares ordenados y sombree en los casos marcados con negrita.

Inicio

1 ,5 6, 21 25

− 2 2 , 9 (7,5,5) 3,9 2 4 2 (

−

11

,

6)

3, 10 10 ,−9 25 ,0 (4,−4)−1, 19 2 2 2 2 2 25 ,7 (3,5) (5,−7) (12,−1)

(3,3)−3, 19 −

2 2 27 , 17(9,4) 7, 15

−

2

(11

,

−

1)

Final

− 3 , 19 −

2 2 2 2 2 27 ,10 Final 5, 23 21

−

2 2 ,0 (12,−5) (−5,9) (

−

2 2

11

2 2 2 (2 2 2

9 11

2

11 62 2 2 9 17 3 62
12
,
11)
10 ,1 (1,−11) Final25 ,− 2 −7, 17 − 11,11)13 ,2−1, 9 60 14 −
2 (7, 9) (12,−6)− 6 ,− 2 (−10,10) Final−3,−2 (5,6)23 ,− 2 (−11,6)− 10,9)
(13,2) −4,− 2 7, 13 Final − 5 , 9(− , 17 (12,3) −2,− 2 (9,7) 8,−2 − 5 , 9
−
11 2 2
21 , 19 Final −6, 17 23 27 5 −2 2 , 13 (9,−1) −2 ,−2−2 2 2
(−11,10) (10,− 2)− 2 ,−7 25 , 11 (9,0)− 2 , 2
12, 19 (8,−6)− 2 ,− 2 16, 13 17 ,1− 7 ,− 2−
15 13 25 9 2 2
15 11 84 17 2 2 2
25 ,9 (17 9) Final31 , 9 8, 3 (23 − 2 ,−10)− 2 2 ,−2 2 2 2
23 ,8 (11,−4) 10, 10
−
2 14, 7 (7,1) (−9,−10) (
−
2 2
10
,
7)
(13
,
−2) 21 ,−2 (−14,2) 13 ,0 −9,−2−
9 11 15 2 2
29 15 11 Final (
(4,3) Final2
27 6) (10,−6)2 ,0 (7,−1)− 2,− 22 ,− 19, 11 3 3 9
− 2 14,− 2 8,− 2 − 2,−2
√9, 5 (6,−4) Final27,−6 Final (−4,−3)2 2
(2
,
3)

(4
,
11 15
–
√4)[21],0 12,– 2 7, [13] (–4,–3)2 2
(1
,
4)
(4
,
–
7)
21, 310, 15
–
2
5
,
15 13 3 2 2 2– 2,–2 0, [9] (8,–10)[23],2 (8,–6)[7],8 Fin2 2 2

2.2.2. Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera, para hallar la distancia de una semirecta (segmento[4]) limitada por los dos puntos (La semirecta no debe ser horizontal ni vertical), se debe formar un triángulo con un punto P mediante rectas auxiliares, donde P_1P y $P P_2$ son catetos del triángulo formado, que se calculan del mismo modo que se calcula la distancia en un recta real

y P_1

P_2 P

[4]Porción de recta delimitada por dos puntos.

Aplicando el teorema de "Pitágoras[5] " al triángulo de $P_1P P_2$ tenemos:

y Distancia p_1p_2 P1 = (x1, y1) Dp
1
p
2
$_2 = (p_1p)^2 + (pp_2)^2$

(
Dp
1
p
2
)
$^2 = |x_2 - x_1{}^{2\,2}| + |y_2 - y_1|$ $Dp_1p_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ $|^{y2} - {}^{y1}|$
$P_2 = (x_2, y_2)$ $P = (x, y)$
$|^{x2} - {}^{x1}|$
Figura 2.4: Distancia entre dos puntos.
Por consiguiente, la fórmula para hallar la distancia entre 2 puntos en un plano está dada por:
$D_{P1P2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
[5]La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado. Teorema de Pitágoras.
A
c b
C a^B
$c^2 = a^2 + b^2$
Ejemplo
Dados los puntos
A
=
3
,
^{7} , B = (−1, 4) , C =−4,^{3} −
2^y2
D = (5,−1) , determine la distancia del segmento comprendido entre los puntos AB, BC, CD, DA
Solución
Distancia entre los Puntos AB Distancia entre los Puntos BC d
AB
=
(3 + 1)
$^2 +^7 4^2$ $d_{BC} = (-4 + 1)^2 +_{-2} - 4^{23\,2} -_{2} + - 2$
d
AB

=
16 +
1 −2 d_{AB} = $(-3)^{11\ 2}$$d_{AB}$ = $(4)^2$ $+^{1\ 2}$
4
=
64+1 d_{AB} = 9 + 121 = 36+121 4 4 4
d
AB
=
65 = $\sqrt{65}$ d_{AB} =157 = $\sqrt{157}$
4 √4 4 √4
$d_{AB} = \sqrt{65} \approx 4,03$ $d_{AB} = \sqrt{157} \approx 6,26$ 2 2
(
B 5 y
1
,
4)
AB
=
√65
−
4 2 A 3, 7
2
3
BC
=
$\sqrt{157}^2$
2 DA = $\sqrt{97}$ 1^2 x 5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 − 1 D −
C
−
4
,
3
−2 −2 CD = $\sqrt{5}$ (5, −1) 2

2.2.3. Fórmula del punto medio

Para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento de recta limitado por dos (2) puntos cualquiera del plano P_1 (x_1, y_1) y P_1 (x_2, y_2), se considera un punto P (x, y) como el punto medio del segmento, de tal manera que el segmento P_1P debe ser igual en longitud al segmento P P_2 tal que:

y P_2

$x - x_1 = x_2 - x$ P $2x = x_1 - x_2$ P1 $x = \frac{x1+x2}{}$

2

x_1 x x_2 x

De manera similar se realiza para la variable "y", es decir, se realiza la semisuma de las abcisas y de las ordenadas, entonces la ecuación[6] del punto medio está dada por:

P

m

=

x_1+x_2 , y_1+y_2 2 2

Ejemplo

Comprobar analíticamente que las diagonales del rectángulo ABCD se cortan en el punto medio E.

Solución

4 y A(2,4)

3 D(3,3) 1. Tomemos las coordenadas de los vértices A y C para hallar el punto medio.

E 2 B

(1,2)

1 C(2,1) Coordenada en x es:

$x = \frac{2+2}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$

Coordenada en y es:

x

1 2 3

_1

$y = \frac{4+1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2{,}5$

por lo tanto el punto medio entre A y C es P $m_{AC} = (2, \frac{5}{2})$

2. Tomemos las coordenadas de los vértices B y D para hallar el punto medio.

[6]Igualdad que contiene incógnitas (Variables) que satisface sólo para

valores determinados de las incógnitas.

Coordenada en x es: $x = \frac{3+1}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$

Coordenada en y es:

$y = \frac{4+1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2{,}5$

Por lo tanto, el punto medio entre A y C es: $P\,m_{BD} = (2, \frac{5}{2})$

Como $P\,m_{AC} = P\,m_{BD}$ queda comprobado que las diagonales del rectángulo ABCD se cortan en el punto medio E.

Actividad No. 2 Tomando como referencia el mapa del departamento del Quindío:

y

Pueblo tapao

x

Determine:

1. Las Coordenadas de los 13 municipios del departamento del Quindío.

2. ¿Qué distancia recorre una persona si desea hacer el recorrido Armenia - Circasia - Montenegro - Pueblo Tapao - La Tebaida Armenia?

3. Una persona desea ir a Montenegro estando en La Tebaida, pero no sabe cuál camino es más corto. ¿Qué camino es más corto y cuántos Kms. mide cada camino?.

4. Si se toma como referencia Génova y Filandia, ¿Qué municipio estaría en el punto medio y cuál es su coordenada?

2.2.4. División de segmento de recta bajo una razón dada

Cualquier segmento de recta de longitud L, cuyos extremos son los puntos del plano P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) puede ser cortado en un punto P (x, y), convirtiendo al segmento en dos, con longitudes distintas, uno de longitud a y otro de longitud b, donde a + b = L . Podemos decir que este punto P (x, y) dividió al segmento en una razón r. Para hallar el punto P (x, y) del segmento L se establece que^{P2P} = ^{x2x} = $r_{P\ P1\ xx1}$

y $P2(x2, y2)$ real se tiene:

$P_1(x_1, y_1)$ $M_2M = x - x_1$ y $M M_1 = x_2 - x$ P (x, y)

entoces^{x_x1} = r_{x2-x}

x

despejando la variable x se obtiene:

x1 x2 x $x - x_1 = r\ (x_2 - x)$

Aplicando distancia en la recta

Aplicando distributividad $x - x_1 = rx_2 - rx$

Organizando términos semejantes $x + rx = rx_2 + x_1$

Sacando factor común $x\ (1 + r) = rx_2 + x_1$

Despejando x se tiene

x

=

rx_2+x_1 $1+r$

Organizando variables $x = ^{x1+rx2}$, de modo similar se determina para la variable
y;
1+r
entonces para encontrar un punto P que divide un segmento bajo una relación dada se utiliza:
P
r
=
x_1+rx_2 , y_1+ry_2 1+r 1+r
El orden en el que se tomen los puntos, influye en el punto a encontrar.

Si la relación r es negativa el punto P (x, y) queda en la prolongación del segmento P_1P_2, es decir el segmento aumetaría su longitud L.

Ejemplo

Se desea construir una escalera entre dos pisos cuya ubicación es P_1 = (1, 0) y P_2 = (7, 4), con un descanso a un tercio, determine las coordenadas donde se desea hacer el descanso.

Solución

Para encontrar los descansos se deben buscar las coordenadas de x , ∧, y, tomando la relación r = ^{1} en los puntos P_1P_2 y $P_2P_{1\cdot 3}$

Encontrando
P
r
P1P2 = $1+^1(7)_,\ 0+^1(4)_= \ ^{10}\ _,\ 4$
3 3 3 $=^5$, 1_{1+1} ^{3}$_{1\ 4\ 4\ 23\ 1+3\ 3\ 3}$

Encontrando
P
r
$_{P2P1}$ $=^{7+1\ 22}$
3 3(1)$_,$ $^{4+1(0)}$ $=^3$, ^{4} $=^{11}$, $3_{1+1\ 1+1\ 4\ 4\ 23\ 3\ 3\ 3}$

Por lo tanto, los descansos se deben hacer en las coordenadas: D_1 ^{5}, 1 y D_2 ^{11} , $3_{2\ 2}$

2.2.5. Ejercicios entre puntos

1. Determine en qué cuadrante están los siguientes puntos:
A = (−3, 2,) C = (7, 2) E = (1,−6) B = (0, 5) D = (−3, 0) F = ($_{-3}$,−4)
2. Determine las coordenadas de los puntos que se muestran en el plano cartesiano:
3 y
B 2 A
1
D
4
−
3
−
2
−
1
1
2
3
x
−1
G F− C
−2
−3 E
3. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
5
2a. A = (9, 5) y B = (−3,−4) c. A =^{1}, 3 y B =−2,−2
b. A = (−1, 4) y B = (2,−3) d. A = (−2,−4) y B =^{73},−3$_{20}$
4. Encontrar el punto cuya ordenada es 2 y que diste 8 unidades del punto P = (5,−2)
5. El punto A está ubicado en las coordenadas A = (−3, 5). El punto B tiene coordenadas B = (8, k). Si la distancia entre A y B es 12, encuentre k.
6. Determine si los puntos A = (−5, 6), B = (2, 5) C = (−3,−3) y tienen la misma distancia con respecto al punto P = (−2, 2).
7. El punto C = (−1, 4)biseca[7] el segmento de recta que une P_1 =

(x_1, 3) y P_2 = (–4, y_2) , encuentre los valores de x_1 y y_2.

8. Un barco se detiene en medio del mar, el cual lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto A = (10,–10). Dos barcos situados en B = (35, 24) y C = (–25, 15) acuden en su ayuda. Si los dos barcos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia A ¿Cuál llegará primero?

2.3. La línea recta

La línea recta es un objeto geométrico que al ser colocado en un plano cartesiano, debe tener una ecuación que depende de la inclinación. [7]Divide un objeto en dos partes iguales

2.3.1. Ecuación de la recta

La ecuación de una recta L en su forma punto pendiente, está dada por:

y = m x + bi¯Corte con el eje y

¯ Pendiente

(Inclinación de la recta) si b > 0 el corte está por encima del eje x si b < 0 el corte está por debajo del eje x

y donde la pendiente m puede ser:

– m > 0 la pendiente es positiva (se dice que la recta es creciente).

– m = 0 no hay pendiente y la recta es horizontal.

– m < 0 la pendiente es negativa (se dice que la recta es decreciente).

– m >^{a} la pendiente es indeterminada y la recta es vertical, por$_0$ consiguiente no tiene corte con el eje y.

Pendiente positiva Pendiente indeterminada

y

L

1

$^y L_1$

m m

=

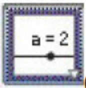
a 0

b m > 0 x x

Pendiente negativa No hay pendiente

L_1 ^{y} y

m_b L_1 m b
m < 0 x m = 0 x
Actividad
con Software₂

1. Con la herramienta deslizador (décimo botón), haga clic en la zona gráfica, este mostrará una ventana en donde le pedirá unos datos como se mediran, en ángulo o en numero, nombre del deslizador, rango del deslizador e incremento y ubicación.
2. Cree 2 deslizadores en la opción "nombre" coloque m y b respectivamente y dé clic en aplica.
3. En la barra de argumentos digite y = m * x + b el cual graficará una línea recta en la zona gráfica.
4. Mueva el deslizador m, recuerde que debe tener el puntero seleccionado (primer botón). Diga ¿Qué sucede al mover este deslizador? 5. Mueva el deslizadorb. Diga ¿Qué sucede al mover este deslizador?

2.3.2. Relación entre pendiente y el ángulo de inclinación

y L_1 m
=

Cateto Opuesto Cateto Adyacente Senα
m Cateto$^{m=}$ Cosα
α opuesto m = tgα
Cateto adyacentex$^{\alpha = \text{arctg}(m)}$

2.3.3. Ecuación de una recta dados dos puntos

Por dos puntos del plano pasa una única recta.

Para determinar una recta dados dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) debe buscar la pendiente entre ambos puntos, luego se determina la recta mediante la pendiente y uno de los puntos dados.

2.3.3.1. Ecuación de la pendiente

La pendiente m de una recta L determinada por dos puntos P_1 y P_2, se puede medir mediante su desplazamiento vertical llamado elevación sobre el desplazamiento vertical llamado avance, entonces la pendiente está dada por:

m

=

elevacion$=$ y_2-y_1 avance x_2-x_1

Ejemplo

Determinar si los puntos A = (–5,–2), B = (–3,–1) y C = 5, 7 de la siguiente figura son colineales

8 2 4 .

Solución

F 3 y D

2 C

1

x

6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 – B −1

E

A –2

Para determinar si son colineales las pendientes de los segmentos AB, AC y BC deben ser iguales, entonces:

m_{AB} = –1–(–2) m_{AB} = – 1+2 m_{AB} = 1 – 3 – (– 5) ⇒ – 3+5 ⇒ 2 m

AC

=

7 (–2) m_{AC} = 7+2 m_{AC} = 15

4 4 4 m_{AC} = 1 5−(– 5) ⇒ 5+5 ⇒ 15 ⇒ 2 2− 2 2

7 (–1) m_{AC} = 7+1 m_{AC} = 11

4 4

5 m_{AC} = 1 m_{BC} = 4 – (−3) ⇒ 5+3 ⇒ 11 ⇒ 22− 2 2

Como las pendientes de AB = AC = BC = 1 entonces los puntos A, B y C son colineales. 2

2.3.3.2. Ecuación punto pendiente

Una línea recta queda determinada si se conoce la pendiente (o ángulo de inclinación) y un punto, entonces la ecuación de la línea recta dado un punto y la pendiente, está dada por:

[8]Son aquellos puntos que están sobre una misma recta.

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Ejemplo

Dados los puntos $P_1 = (1, 3)$ y $P_2 = (6, -7)$ encontrar la ecuación de la línea que une ambos puntos.

Solución

Primero se debe encontrar la pendiente entre ambos puntos:

$m_{P1P2} = \frac{-7-3}{6-1} = \frac{-10}{5} = -2$

Aplicando la ecuación de punto pendiente con uno de los puntos se tiene:

$y - 3 = -2\,(x - 1)$ aplicando distributividad $y - 3 = -2x + 2$ despejando la variable y $y = -2x + 5$

2.3.4. Ecuación general de la línea recta

La ecuación de cualquier recta es representada por la ecuación de primer grado $Ax + By + C = 0$, siendo A, B y C constantes, donde A y B no son cero simultáneamente.

– Si $A = 0$ la recta es paralela al eje x

– Si $B = 0$ la recta es paralela al eje y

– Si $C = 0$ la recta pasa por el origen

– Si $B = 0$ al despejar la variable y de la ecuación general se obtiene la ecuación

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, donde la pendiente de la recta está dada por:

$m = -\frac{A}{B}$ y el corte con el eje y es $-\frac{C}{B}$

Ejemplo

Dada una recta cuya ecuación general $6x - 2y + 2 = 0$, conviértala la forma punto pendiente y determine ¿cuál es el corte con el eje y? y cómo es su inclinación

Solución

Para que una recta esté en la forma punto pendiente, se debe despejar la variable y:

$6x + 2 = 2y$ Sumando $2y$ en ambos lados de la igualdad.

$\frac{6x+2}{2} = \frac{2y}{2}$ multiplicando por $\frac{1}{2}$ entonces

$y = 3x + 2$, por lo tanto, el corte con el eje y es 3 y la pendiente m = 3 es positiva

Práctica No. 2

En el Cd busque la carpeta Apple, abra el archivo líneas.html y realice la actividad, relacionada con líneas rectas.

2.3.5. Ángulo entre rectas

Sea α el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, entonces:

$\alpha = \theta_2 - \theta_1$

θ_1 θ_2

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$tg\alpha = tg(\theta_1 - \theta_2)$ se saco la tangente en ambos lados por identidad trigonométrica[9] $tg\alpha = \frac{tg\theta_1 - tg\theta_2}{1+tg\theta_1 tg\theta_2}$

$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$ cambiando las tangentes por las pendientes, entonces la ecuación para determinar el ángulo entre dos rectas está dada por:

$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$$

[9] $tg(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{tg\theta_1 \pm tg\theta_2}{1 \mp tg\theta_1 tg\theta_2}$

Ejemplo

Un polígono está formado por los puntos:

y 5

B

A = (2, 3) 4

B = (2, 5) 3 A D = (1, $\frac{3}{2}$) 2

E = ($\frac{179}{50}$, $\frac{77}{50}$) 1 D E

compruebe que el ángulo DAE mide el doble del ángulo DBE. –1 1 2 3 x –1

Solución

Para encontrar los ángulos pedidos, se deben encontrar las pendientes entre los segmentos DB, ∧, CB y determinar los ángulos

entre dichos segmentos, de igual modo para los segmentos DA , $\wedge$, EA.
Pendiente entre los segmentos:
m
DB
=
3 5 = 7
–
2 = 72
1 ¯2 – 1 2 –
m
77
50
EB
=
77_5 = $-^{250}$ 173_{173} 179
–
2
179
$^{50}100$ = – 50 – 79 $_{-}^{79}50$ – $_{50}$ 50
Ángulo DBC:
tgα
=
$_{1+}-^{79}$ $-^{2}$ tgα = $-^{158}$ tgα $=^{899}$ α = tg_{-}^{1} ^{899} $=_{(}$
173 7 899
1053_{173}
–
79
) (^{7}) ⇒ – $_{158}$ $\Rightarrow^{1053}$ $\Rightarrow^{1053}$ 40,5^2
Pendiente entre los segmentos:
3 3 = $-^{2}$ = $^{3}m_{DA}$ $=^{3}$
2
1 ¯2 – 1 2 –

m

EA = $^{50-\ 50\ 73}$179

77_3 = $77 - 150$= −7950 −2 179−100

50

Ángulos DAE :

73 3 383

tgα =$_{1+}$−^{79}−^{2} tgα = −^{158} tgα = ^{383} α = tg$_{-}$$^{1\ 383}$ = 81(73 61

−79) (^{3}) ⇒−158 ⇒^{61} ⇒^{61}$_{2}$

Como DBC = 40,5 y DAE = 81, entonces cumple que: DAE = 2 DBC

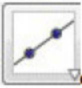
Práctica No. 3

En el Cd busque la carpeta Apple, abra el archivo tractor.html y realice la actividad, relacionada con ángulos.

Actividad
con

***Software*3**

1. Con la herramienta segmento

construya un triángulo cuyos vértices son ABC.

2. Con la herramienta ángulo

mida los ángulos internos del trián

gulo, para ello se hace clic en los vértices del triángulo, el orden para medir un ángulo interno debe ser en el sentido al giro de las manecillas del reloj, de lo contrario medira el ángulo externo. Si va a medir el∠A el orden es BAC, seguidamente, aparecerá en el panel de objetos el ángulo α =__ la medida correspondiente al ángulo.

3. Mida los ángulos faltantes b y c, aparecerá β =__ y γ =__ respectivamente.

4. En la barra de argumento digite D = α + β + γ[10], esto asignará la suma de los ángulos a la variable D.

5. Con la herramienta texto

que está en el menú desplegable del botón deslizador, haga clic en la zona gráfica, esto genera una caja de texto en la cual va a digitar "la suma de los ángulos es" + D y luego dé clic en Ok. Observe que automaticamente en la zona gráfica aparece un texto que dice la suma de los ángulos es 180°[11].

6. Con la herramienta puntero (primer botón) muevalos vértices del triángulo y observe que la suma de los ángulos internos no cambia aunque ellos cambien su valor.

2.3.6. Rectas paralelas y perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas cualesquiera con m_1 y m_2 sus respectivas pendientes, se dice que:

– Son paralelas si $m_1 = m_2$, es decir, si sus pendientes son iguales.

[10] Para sacar las letra griegas de los ángulos, ellas estan al lado derecho de la barra de argumentos.

[11] Para que el texto aparezca en la zona gráfica cuando se está manejado variables, se debe colocar entre comillas.

– Son perpendiculares si $m_1 . m_2 = -1$, es decir, el producto de sus pendientes es -1; de está se desprende $m_1 = \frac{1}{-m_2}$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, o sea que L_1 y L_2 forman un ángulo de 90°.

Ejemplo

Dada la recta $L_1 : 2x - 8y + 8$ y el punto $P = (-2, 5)$ encuentre: 1. La ecuación de la recta paralela a L_1 de tal forma que pase por el punto P.

2. La ecuación de la recta perpendicular aL_1 que pase por el punto P.

Solución
y
6
P5 paralela
4 Para encontrar la recta paralela, se toma la pendiente de L_1 y el punto P y se usa la ecuación de punto pendiente.
Como la pendiente es
m =
A
−B entonces m = −2 = 1
−8 4
3
perpendicular 2
Aplicando el punto pendiente, se tiene: y − 5 = 1 (x + 2).4
1
2x-8y+8 Despejando y se obtiene que la recta paralela a L_1 es y = 1x + 11 .4 2
−3−2−1 1 2 −1

Para encontrar la recta perpendicular se toma la pendiente inversa de L_1 y el punto P se usa la ecuación de punto pendiente.
Como la pendiente es m = 1, la pendiente inversa es:4
m
=
1
−
1 = −4
4
Aplicando punto pendiente se tiene y − 5 = − 4 (x + 2) , despejando y se obtiene que la recta perpendicular a L_1 es y = 4x − 3.

2.3.7. Intersección entre rectas

y Sean:
L_2 $L_1 = Ax_1 + By_1 + C = 0$ y L1 $L_2 = Ax_2 + By_2 + C = 0$
P (x, y) x Dos rectas cualquiera no paralelas, para encontrar el punto P de intersección entre ambas rectas.
Se puede utilizar alguno de los siguientes métodos: de igualación,

sustitución y redacción

2.3.7.1. Método de igualación

1. Se debe despejar de L_1 y L_2 la misma variable x o y 2. Se debe armar una igualdad entre L_1 y L_2 despejadas de tal manera que quede en términos de una sola variable.
3. De esta igualdad se debe despejar la variable que resulta.
4. Esta variable se debe reemplazar en las ecuaciones de L_1 o L_2 para encontrar el valor de la variable que se despejó en el ítem 1, así se obtendrá el punto P (x, y).

Ejemplo

Sean las rectas $-4x-2y-28=0$ y $2x-3y+10=0$, encuentre las coordenadas del punto de intersección por el método de igualación.

Solución

1. Despejando la variable x de ambas ecuaciones:

De la primera ecuación $-4x-2y-28=0 \Rightarrow -2y-28=4x \Rightarrow$

$$x=\frac{-2y-28}{4}$$

De la segunda ecuación

$$2x-3y+10=0 \Rightarrow 2x=3y-10 \Rightarrow x=\frac{3y-10}{2}$$

2. Armando la igualdad: $\frac{3y-10}{2}=\frac{-2y-28}{4}$

3. Depejando en términos de y:

$4(3y - 10) = 2(-2y - 28) \Rightarrow 12y - 40 = -4y - 56 \Rightarrow 12y + 4y = -56 + 40 \Rightarrow 16y = -16 \Rightarrow y = -1$

4. Reemplazando el valor de y en la primera ecuación:

$-4x - 2(-1) - 28 = 0 \Rightarrow -26 = 4x \Rightarrow x = \frac{-26}{4} \Rightarrow x = \frac{-13}{2}$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P\left(\frac{-13}{2}, -1\right)$.

2.3.7.2. Método de sustitución

1. Se debe despejar de L_1 o L_2 una de las variables x o y.
2. Se sustituye la variable despejada en la otra ecuación
3. Se resuelve la ecuación resultante, la cual debe quedar en términos de una sola variable.
4. La variable despejada en el punto anterior se reemplaza en una de las ecuaciones de L_1 o L_2 para encontrar la variable restante, así se obtendrá el punto P (x, y).

Ejemplo

Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas del ejemplo anterior, por el método de sustitución.

Solución

1. De la primera recta se depeja y:

$-2y = 4x + 28 \Rightarrow y = \frac{4x+28}{-2} \Rightarrow y = -2x - 14$

2. Se reemplaza y en la segunda ecuación:

$2x - 3(-2x - 14) + 10 = 0$

3. Resolviendo la ecuación:

$2x + 6x + 42 + 10 = 0 \Rightarrow 8x = -52 \Rightarrow x = -\frac{52}{8} \Rightarrow x = -\frac{26}{4} \Rightarrow x = -\frac{13}{2}$

4. Reemplazando x en la segunda ecuación: $2\left(-\frac{13}{2}\right) - 3y + 10 = 0 \Rightarrow -13 + 10 = 3y \Rightarrow y = -\frac{3}{3} \Rightarrow y = -1$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P\left(-\frac{13}{2}, -1\right)$.

2.3.7.3. Método de reducción

1. Se debe armar un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas con L_1 y L_2
2. Se debe buscar eliminar una de las variables, para ello se multiplica L_1 por un valor A y L_2 por un valor B tal que se elimine una de las variables .
3. Se despeja la variable resultante.
4. Se repite los ítem 2 y 3 para eliminar la segunda variable y así se obtendrá el punto P (x, y).

Ejemplo

Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas del ejemplo anterior, por el método de reducción.

Solución

1. Armando el sistema: $-4x - 2y - 28 = 0$ ec,1

$2x - 3y + 10 = 0$ ec,2

2. Multiplicando ec.2 por 2 para eliminar la variable x:

$-4x - 2y - 28 = 0$

$4x - 6y + 20 = 0$

$-8y - 8 = 0$

3. Despejando la variable resultante $-8 = 8y \Rightarrow y = -1$.

4. Multiplicando ec.1 por -3 y la ec.2 por 2 para eliminar la variable x: $12x + 6y + 84 = 0$

$4x - 6y + 20 = 0$

$\Rightarrow$

16
x
=
−
104
⇒
x
=
104 13
− 16 ⇒ x = − ^{2}16$_x$ + 104 = 0
Por lo tanto, el punto de intersección es
P
(
13
−2 ,−1).

Ejemplo

En una ciudad se desea instalar un portal de transporte masivo articulado, que quede equidistante de tres barrios, los cuales están en las coordenadas A = (9, 0), B = (−6, 3) y C = (5, 6) ¿En qué coordenada debe ubicarse el portal?

Solución

Para solucionar este problema, debe cumplirse que P A = P B = P C

– Sea P A = P B, entonces:

$(x - 9)^2 + y^2 = (x + 6)^2 + (y - 3)^2$ por distancia entre 2 puntos

$(x - 9)^2 + y^2 = (x + 6)^2 + (y - 3)^2$ eleminando la raíz, elevando al cuadrado ambos lados:

x^2 18x + 81 + y^2 = x^2 + 12x + 36 + y^2 6y + 9 resolviendo los−
−binomios cuadrados perfectos:

0 = 18x − 81 + 12x + 36 + 6y + 9 organizando términos:

5x − y − 6 = 0 sumando términos semejantes (ecuacion1)

– Sea P A = P C, entonces:

$(x - 9)^2 + y^2 = (x - 5)^2 + (y - 6)^2$

despejando, se tiene: 2x − 3y − 5 = 0 (ecuacion2).

Para encontar los valores de x y y se debe armar un sistema 2x2 con las ecuaciones 1 y 2:

5x − y − 6 = 0 2x − 3y − 5 = 0

Resolviendo el sistema se tiene que: x = 1 $\wedge$ y = 1, por lo tanto, el portal debe estar en la coordenada P (1,−1) .

2.3.8. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta L puede determinarse a partir de la ecuación de la recta L y las coordenadas del punto P, la distancia que se toma es la mínima; es decir, la distancia medida sobre la perpendicular a la recta L en un punto Q, que pasa por el punto P.

y P (x, y)

4

3

2

90^0

1 L $Q(x_1, y_1)$x

1 1 2 3 4 5–

–1

Partiendo de la ecuación general de la recta Ax + By + C = 0 y sabiendo que la distancia mínima es la recta perpendicular en el punto

Q,

entonces la pendiente de la recta

L

es

m

=

A

−

B, luego, la pendiente inversa a

L

es

m

2

=

−

1 $m_2 = $ B

A .

−B ⇒ A

Como la pendiente de una recta está dada por $m = ^{y2 - y1}$, entonces:

B

=

y

−

y

x_2

$_1 -^{x1}$ Ax_x_1

Aplicando algo de álgebra se tiene: $B(x - x_1) = A(y - y_1)$, entonces: $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$ es la ecuación de la recta perpendicular a $Ax + By + C = 0$ y que pasa por el punto P (x, y). Como hay que encontrar el punto de intersección Q entre $Ax + By + C = 0$ y la perpendicular, se debe armar un sistema con estas ecuaciones y resolv erlo por el método de reducción:

$Ax + By + C = 0$ ec.1 $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$ ec.2 ⇒

$Ax + By + C = 0$ ec.1

$Bx - Bx_1 - Ay + Ay_1 = 0$ ec.2

Multiplicamos la ec.1 por (A)y ec.2 por (B) para eliminar la v ariable x:

$A^2x + ABy + AC = 0$ $ABy + ABy_1 = 0$ x $A^2 + B^2$

$B2x - B2x1 -^2x_1 + ABy_1 + AC = 0_{-B}$

Despejando la

x

se tiene

x

=

$B^2x_1 - ABy_1 - AC$ (

A^2+B^2

)

Multiplicamos la ec.1 por (B)y ec.2 por (−A) para eliminar la v ariable y :

$ABx + B^2y + BC = 0$

$-ABx + ABx_1 - A^2y + A^2y_1 = 0$

$ABx_1 + y\ A^2 + B^2\ A^2y_1 + BC = 0_-$

Despejando la y se tiene $y = _-{}^{ABx1+A2y1\_BC}$ luego el punto de$_{(A2+B2)}$ intersección Q está dado por:

$Q = B^2x_1 - ABy_1 - AC, -ABx_1 + A^2y_1 - BC, (2$

$A + B^2)\ (A^2 + B^2)$

Ahora se debe encontrar la distancia entre los puntos P Q (que será la distancia mínima):

$Dpq = x1 - (A2+B2 - AC^2\ ABx_1 + A^2y_1 - BC^2 B^2x_1 - ABy_1 + y1$
$- - (A2+B2$
$))$

por distancia entre dos puntos

D
pq
$=$

$(A2+B^2)x_1\ B^2x_1 - ABy_1 - AC^2\ (A2+B^2)y_1$

$- ABx_1 + A^2y_1 - BC^2\ (A2+B^2) - (A2+B^2)^+\ (A2+B^2) -$

$(A2+B^2)$

homogenizando fracciones

D
pq
$=$

$A^2x_1 + B^2x_1 - B^2x_1 + ABy_1 + AC^2$

$A^2y_1 + B^2y_1 + ABx_1 - A^2y_1 + BC^2\ (A^2+B^2)\ ^+\ (A^2+B^2)$

por distributividad y suma de fracciones

D
pq
$=$

$A^2x_1 + ABy_1 + AC^2\ B^2y_1 + ABx_1 + BC^2\ (A^2+B^2)\ ^+\ (A^2+B^2)$

sumando términos semejantes

D
pq
$=$

$A(Ax_1 + By_1 + C)^2\ B(By_1 + Ax_1 + C)^2\ (A^2+B^2)\ ^+\ (A^2+B^2)$

factor común

D

$$D_{pq} = \frac{(A(Ax_1+By_1+C))^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{(B(By_1+Ax_1+C))^2}{(A^2+B^2)^2}$$

por propiedad de las fracciones

$$D_{pq} = \frac{(A(Ax_1+By_1+C))^2+(B(By_1+Ax_1+C))^2}{(A^2+B^2)^2}$$

suma de fracciones homogéneas

$D_{pq} = \frac{A^2(Ax_1+By_1+C)^2+B^2(By_1+Ax_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$ por propiedad de exponentes

$D_{pq} = \frac{(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$ por factor común

$D_{pq} = \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)}$ simplificando

$$D_{pq} = \frac{\sqrt{(Ax_1+By_1+C)^2}}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

por propiedad de las raíces se tiene: $D_{pq} = \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

Entonces, las distancias de un punto P a una recta L está dada por:

$$D_{PR} = \left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Como es una distancia, se utiliza el valor absoluto, unos autores no utilizan el valor absoluto y le asignan el $\pm$ en la raíz, pues han convenido que la distancia es positiva siempre que el punto esté arriba de la recta y negativa si está abajo.

Ejemplo

4mts

Una persona desea subir un muro de 4 mts. de altura, para ello coloca una escalera a 3 mts. de la pared para apoyar la escalera, a un (1) metro de la pared clava un tensor de un metro de altura para anclar la escalera. Encuentre ¿cuánto cable necesita para amarrar la escalera al tensor?.

3mts

Solución

Primero se debe encontar la ecuación de la recta que satisface la escalera, como la altura es 4 mts el punto de referencia es P_1 (0, 4) y como se apoya a 3 mts de la pared el punto de referencia es P_2 (3, 0) entonces la pendiente de esta recta es m = $_{-3}$, luego por punto pendiente se tiene y − 4 = $_{-3}$ (x − 0), entonces la ecuación que satisface la escalera es y − 4 =

4

4

4

$_{-}3x$

Pasando a la ecuación general de la recta se tiene:
3 (y − 4) = −4x ⇒ 4x + 3y − 12 = 0 Luego usando la distancia de un punto a una recta se tiene:

$D_{PR} = |4x+3y-12| \sqrt{42+32}$

Los valores de x y y en la fórmula se reemplazan por la coordenada del punto y como el tensor tiene la coordenada:

P = (1, 1), entonces

D P R =

|

$4(1)+3(1)-12| \Rightarrow D_{PR} = |4+3-12 \ \sqrt{4^2+3^2} \ \sqrt{16+8}| \Rightarrow$

$D_{PR} = |-^5| \ D_{PR} = ^5 = 1$ por lo tanto la persona necesita un

$\sqrt{25} \Rightarrow 5$

(1) metro de cable para amarrar la escalera.

2.3.9. Distancia entre rectas paralelas

Dadas dos rectas paralelas L_1 y L_2, se debe calcular la distancia de cada recta al origen; como el origen está dado por las coordenadas P = (0, 0), la ecuación de distancia del punto (el origen)

a la recta L
estaría dada por
D
OL
=
|C
$\sqrt{A2}$ |B2, obtenidas estas distancias se deben:+
Restar, si las rectas L_1 y L_2 están en los mismos cuadrantes.
Sumar, si las rectas L_1y L_2 están en lados opuestos del origen es decir un cuadrante dif erente:
L_1 1 2 1 L_1
2 −1 1−L2
−1
−2 −1 1 2
−
1
L_2 −
Ejemplo
Se desea construir un puente para comunicar 2 pueblos, se quiere saber la longitud en metros del puente para calcular los costos, sabiendo que éste debe atrav esar un río cuy as orillas son paralelas y tienen por ecuaciones las rectas $L_1 : x + 2y - 2 = 0$ y $L_2 : 2x + 4y + 14 = 0$.
Solución
Para encontrar la longitud del puente se debe encontrar la distancia de L_1al origen, entonces:
$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
y la distancia del origen a L_2, luego:
$$\frac{|14|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$
Como L_1 y L_2 están en lados opuestos del origen, ambas distancias se deben sumar.
$$\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,025$$
Por lo tanto la longitud del puente es de 40 metros y 25 centímetros.

2.3.10. Ejercicios línea recta

1. Responda en cada uno de los casos.
   a. ¿A que se le llame ángulo de inclinación de una recta?

b. ¿Cuáles son los valores que comprende el ángulo de inclinación y por qué?

c. ¿Como se establece la pendiente de una recta?

d. ¿Qué características tiene una recta que tiene su ángulo de inclinación de 90 grados?

e. ¿Qué características tiene una recta que tiene su ángulo de inclinación de 180 grados?

f. ¿Cuántos puntos se necesitan para conocer la pendiente y la ecuación de una recta, que fórmula se utiliza?

2. Determine ¿Cuál de los siguientes puntos pertenecen a la recta $3x + 4y - 1 = 0$?

a. $A = (1, -1)$ c. $C = (3, 2)$ b. $B = (-1, 1)$ d. $D = (4, -3)$

3. Dados los puntos $A = (2, 4)$, $\wedge$, $B = (-3, -1)$ que estan sobre la recta L, determine cual de los siguientes puntos pertenece a la Recta L

a. $E = (1, 3)$ c. $G = (0, -2)$ b. $F = (-3, 5)$ d. $H = (-1, 1)$

4. Hallar la pendiente m y el ángulo de inclinación θ de la recta que unen los puntos

a. $A = (2, 4)$ y $B = (-3, -1)$

b. $A = (7, -2)$ y $B = (-2, -2)$

c.
A
= (
11 6) y B = (35
−
2
,−2)

d.
A
= (
2
,−
3, 2) y B = (−3, −3)−

5. Obtenga la ecuación general de cada una de las rectas que pasan por el punto A y pendiente m

a.
A
= (2
,
−
2)
,
∧
,m
=
−
2
c.
A
= (
−
1
,
5) ,
∧
,m =
9 −5
b.
A
= (3
,
1)
,
∧
,m
=
4 d. A = (−3,−6), ∧,m = 1
5 2

6. La recta L_1 esta limitada por los puntos A ∧, B y la recta L_2 esta limitada por los puntos C ∧, D, determine cual par de rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas

a. A = (−2,−10), B = (2,−1) y C = (−8, 4), D = (2,−1) b. A = (−2,−10), B = (−8,−4) y C = (−2, 6), D = (6,−2) c. A = (12,−6), B = (4,−2) y C = (2, 14), D = (− 2, 6)
d.

A

= (

5, 3), B = (9, 11 y C = (7, 9 3 −2), D = (−2, 11)2 2 2 2) 2 2

7. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela y perpendicular a la recta L y que pasa por el punto P

a. $5x + 14y + 8 = 0$; $P = (-4, 8)$ b. $3x - 15y + 96 = 0$; $P = (-2, 3)$

c.
2
x
+
y
+ 7 = 0
;
P
=

3, 9 2 2

d. $2x^3$,−2 − 7y − 15 = 0; P =−2

8. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $-3x+y-5 = 0$ y $4x-5y+7 = 0$ y es perpendicular a la recta $x - y + 1 = 0$

9. Hallar la pendiente y la ecuación de una recta que forma un ángulo de 45^o con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $P_1 = (2,-3)$ y $P_2 = (6, 5)$.

10. Escriba la ecuación de la recta L_1 en su forma general.

a.
y
=
−
2
x
+
5 c. y = 3x + 1
3 2
b. y =
3
3
−
5

x
+
^{2} d. $y = {}^{1}x + {}^{3}$
5 2 2
11. Encuentre la ecuación de una recta que pasa por el punto P = (−1, 2) y tiene la misma pendiente de la recta $12x - 3y - 5 = 0$.
12. Encuentre la distancia que hay entre el Punto P y la recta L delimitada por el punto Q y la pendiente m :
a. P = (4,−2), Q = (−4,− 2), m = ^{4} b.
P
= (6
,
9)
,
Q
= (9
,
−
3)
,
m
=
5^{5}
−7
c.
P
= (
−
7
,
−
1)
,
Q
= (12
,
6)
,
m

=

4

$^{3\,7}$d. P = (−16, 2), Q = (−13, 4), m = $_{-4}$

13. Calcule la distancia que separa las rectas paralelas L_1 y L_2 dado que:

a. $L_1 = 4x + 5y - 20 = 0$ y $L_2 = 4x + 5y + 108 = 0$ b. $L_1 = 2x - 3y + 10 = 0$ y $L_2 = 2x - 3y - 8 = 0$ c. $L_1 = x - {}_3y = 20$ y $L_2 = 3y = x - 39$

14. Cierta ave tiene su nido sobre un árbol a 25 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 10 metros de distancia del árbol.

a) Si el ave subiera hasta el nido en línea recta, ¿Cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida por el ave? ¿Cuál la pendiente de la misma?

b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

15. Un carro va por una calle que sigue la trayectoria de la recta 8x-7y=-24, en el punto (6,4) hay un motociclista que va por la carrera, encuentre la distancia de la moto a la calle de intersección y la trayectoria que sigue la carrera por la cual transita la moto.

2.3.11. Triángulos

Un triángulo es un polígono determinado por tres (3) segmentos de recta llamados lados del triángulo, que se cortan entre sí dos a dos, generando tres puntos no colineales llamados vértices, denotados por letras mayúsculas.

A

Para nombrar el lado de un triángulo, c_b éste se nombra con la letra minúscula del vértice al cual es opuesto. B_a C

2.3.12. Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar según:

La longitud de sus lados

1. Triángulo equilátero: es un triángulo con todos los lados congruentes (Iguales).
2. Triángulo isósceles: es un triángulo que tiene por lo menos dos lados congruentes y uno desigual.
3. Triángulo escaleno: es aquel triángulo que tiene los tres lados desiguales.

Ejemplo

Dados los puntos A = (1, 1), B = (−2,−3) y C = (5,−2), clasifique el

triángulo por la medida de sus lados.
Solución
Se deben encontrar las distancias entre los vétices:

$D_{AB} = (-2 - 1)^2 + (-3 - 1)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$D_{BC} = (5 - (-2))^2 + (-2 - (-3))^2 = (7)^2 + (1)^2 = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

$D_{CA} = (1 - 5)^2 + (1 - (-2))^2 = (-4)^2 + (3)^2 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

1 y A Como la longitud de los lados 2
–
1
1
2
3
4
5
x AB es igual a la longitud de AC, $-_1$ entonces es un triángulo isósceles.
–C
B
_2
3_

La medida de los ángulos internos
1. Triángulo acutángulo: es un triángulo cuyos tres ángulos interiores son agudos (menos de 90°).
2. Triángulo rectángulo: es un triángulo en el que uno de sus ángulos es recto, los otros dos son agudos.
3. Triángulo obtusángulo: uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90º).
La suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.
Ejemplo
Dados los puntos A = (2, 3), B = (–2, 2) y C = (3,–1) clasifique el triángulo por la medida de sus ángulos.
Solución
Para encontar la medida de los ángulos[12] primero se debe encontrar las pendientes de los segmentos comprendidos entre los vértices.

$m_{AB} = \frac{2 - 3}{-2 - 2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

m

BC

=

–

3 3+2 5

$1_-^2 = _- {}^3 = _{-5}$

$m_{CA} = {}^{3+1} = {}^4 = -4_{2-3\,-1}$

Con estas pendientes se reemplaza en la ecuación de ángulo entre rectas:

Para ABC

$^{3\ 1\ 17\ 1}\ (-1) \Rightarrow \beta = 45^o tg\beta = _{1+}{-}^{5-4}\ ) = {-}^{20}$

3

20_4

$tg\beta = -1 \Rightarrow \beta = tg_{-(-5)(1\ 17} \Rightarrow$

[12]Aunque se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman180^o se deben encontrar los 3 ángulos para verificar que están bien hallados.

Para ACB

$^{3+4} = {}^{17}\ tg\gamma = 11 \Rightarrow \gamma = tg_-^{\ 1}\ (11) \Rightarrow \beta = 45^o tg\gamma = _{1+}{-}^{5\ 5}$

(

3

–

5

)

(

–

4)

17

$_5 \Rightarrow$

Para BAC

tgα

=

1 15

4 4

$1+_{(}{}^{1-4} = {}^{-}0_{4)}(-4)$

Como es una forma indeterminada y la tangente se indetermina en 90^o entonces $\alpha = 90^o$.
Por lo tanto, el triángulo es rectángulo.

3 a α B
β 2
A
y
1 c b
2 −1 1 2 γ 3 − C −1

2.3.13. Elementos notables de los triángulos

Todo triángulo lleva asociado ciertos elementos como las alturas, las medianas, las mediatrices y las bisectrices.

2.3.13.1. La altura

La altura es el segmento de recta que sale de cada uno de los vértices y corta en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.
El punto donde se intersectan las tres alturas de un triángulo se denomina Ortocentro.

Dependiendo del triángulo, el ortocentro es:

– Un punto interior si el triángulo es un triángulo acutángulo.
– Es un punto exterior del triángulo si es un triángulo obtusángulo.
– Es el vértice del ángulo recto, si es un triángulo rectángulo.

2.3.13.2. La mediana

La mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

El punto donde se intersectan las tres (3) medianas de un triángulo se denomina Baricentro, también llamado centro de gravedad del triángulo.
El baricentro siempre es un punto interior del triángulo.

2.3.13.3. La mediatriz

La mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de un lado del triángulo.
El punto donde se intersectan las tres (3) mediatrices de un triángulo se denomina Circuncentro y equidista de los vértices del triángulo.

Dependiendo el triángulo, el ortocentro es:

– Un punto interior si el triángulo es acutángulo.
– Un punto exterior si el triángulo es obtusángulo
– Es el punto medio de la hipotenusa si es un triángulo rectángulo.

Los puntos ortocentro, baricentro y circuncentro son colineales y la recta que contiene a estos tres (3) puntos es llamada la recta de Euler. .

2.3.13.4. La bisectriz

La bisectriz es el segmento de recta que divide a un ángulo interior o exterior en dos ángulos de igual medida. El punto donde se intersectan las tres (3) bisectrices se denomina:

– Incentro si está al interior de un triángulo, y es equidistante de los lados del triángulo.

– Excentro si es el punto donde se intersectan dos (2) bisectrices exteriores con una bisectriz interior en un triángulo, el excentro siempre son puntos exteriores al triángulo y todo triángulo tiene tres.

Ejemplo

Dado el triángulo, cuyos vértices son: $A = (-5, 6)$, $B = (-1, -4)$ y $C = (3, 2)$ encuentre:

a. Las medianas

b. El baricentro

c. Las mediatrices d. El circuncentro e. Las alturas

f. El ortocentro

g. La recta de Euler

Solución

Se deben buscar los puntos medios para encontrar las mediatrices y las medianas

$$P\,m_{AB} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{6-4}{2}\right) \Rightarrow P\,m_{AB} = (-3, 1)$$

$$P\,m_{BC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) \Rightarrow P\,m_{BC} = (1, -1)$$

$$P\,m_{CA} = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow P\,m_{CA} = (-1, 4)$$

a. Tomando los vértices y los puntos medios del lado opuesto usamos la ecuación punto pendiente:

Para $C = (3, 2)$, y $P\,m_{AB} = (-3, 1)$

$$m = \frac{1-2}{-3-3} = \frac{-1}{-6} \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

$$y - 2 = \frac{1}{6}(x - 3)$$

$y -$

2 =

1$_x$ 1

- 2

y = ^{1}x$^{6\ 1}$ + 2$_{6\ -\ 2}$

y

=

1 3

$_6$ x $_{-\ 2}$ ecuación geométrica de la mediana CP m_{AB} y = $^{x+9}$ 6y = x + 9$_6$ ⇒

x − 6y + 9 = 0 ecuación general de mediana CP m_{AB}

Para A = (−5, 6), y P m_{BC} = (1, −1)

m = − ^{1}−^{6} = − ^{7} m = $_{-6}$

y − 6 =

7

1+5$_7$ 6 ⇒

−

$_6$(x + 5)

y − 6 = $_{-6}$x $_{-\ 6}$ + 6

y =

7 35

7

$_{-6x}$ + ^{1} ecuación geométrica de la mediana AP m_{BC6}

7x + 6y − 1 = 0 ecuación general de la mediana AP m_{BC} Para B = (−1, −4), y P m_{CA} = (−1, 4)

m = $^{4+4}$ = ^{8} m = forma indeterminada entonces,

−1+1 0 ⇒

la ecuación de la mediana BP m_{CA} es x = −1

b. Para encontrar el baricentro, basta con igualar 2 de las medianas:

x − 6y + 9 = 0 (7) x − 6y + 9 = 0 7x + 6y − 1 = 0 (−1) 7x + 6y − 1 = 0

−48y − 64 = 0 8x − 8 = 0

Por lo tanto el baricentro tiene coordenada

P − 1 ,

4 3

c. Para encontrar las mediatrices, se halla la pendiente inversa del segmento donde está el punto medio y usamos la ecuación punto pendiente:

m

AB

=

−

4−6 = 10

−

4

= ^{5} entonces m$-^1$ =$-^1$ = ^{2}

−1+5 2 AB^5 5$_{-2}$

m

BC

=

$^{2+4}$ = ^{6} = ^{3} entonces m$_-{}^1$

3+1

4

2

BC

3

=

− 1 = 2

$-^3{}_2$ m

CA

=

2−6 = 4 1

−

8

= $_{-2}$ entonces m$_-{}^1$ =$_-{}^1$ = 2$_{3+5\,CA1}$

−2

Para

P m

AB

y

m

-1 AB

$y - 1 = {}^2(x + 3)$

y

=

2

5

$x + {}^{11}$ Ecuación geométrica de la mediatriz$_{5\ 5}$

$2x - 5y + 11 = 0$ Ecuación general de la Mediatriz

Para

P m

BC

y

m

-1 BC

$y + 1 = _{-3}(x - 1)$

y =

2

2 1

$_{-3x-3}$ Ecuación geométrica de la mediatriz $2x + 3y + 1 = 0$ Ecuación general de la Mediatriz

Para

P m

CA

y

m

-1 CA

$y - 4 = 2(x + 1)$

$y = 2x + 6$ Ecuación geométrica de la mediatriz $2x - y + 6 = 0$ Ecuación general de la Mediatriz

d. Para encontrar el circuncentro, basta con igualar dos (2) de las medianas:

$2x + 3y + 1 = 0$ $2x + 3y + 1 = 0$ $2x - y + 6 = 0$ (-1) $2x - y + 6 = 0$ (3)

$_{4y-}\ 5 = 0_{8x}\ 19 = 0$ Por lo tanto, el circuncentro tiene coordenada

P

19

$-$

8

,

5 4

e. Teniendo las pendientes inversas y las coordenadas de los vértices, hacemos uso de la ecuación punto pendiente:

Para

C

y

m

− 1 AB

$y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3)$

$y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ Ecuación geométrica de la Altura

$2x - 5y + 4 = 0$ ecuación general de la Altura.

Para

B

y

m

− 1 CA

$y + 4 = 2(x + 1)$

$y = 2x - 2$ Ecuación geométrica de la Altura $2x - y - 2 = 0$ ecuación general de la Altura.

Para

A

y

m

− 1 BC

$y - 6 = -\frac{2}{3}(x + 5)$

y =

2

2

$-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ Ecuación geométrica de la Altura

$2x + 3y - 8 = 0$ Ecuación general de la Altura.

f. Para encontrar el ortocentro, basta con igualar 2 de las medianas:

$2x + 3y - 8 = 0$ $2x + 3y - 8 = 0$ $2x - y - 2 = 0$ (-1) $2x - y - 2 = 0$ (3)

$4y - 6 = 0$ $8x - 14 = 0$ Por lo tanto, el ortocentro tiene coordenada

P

7, 3

4 2

g. Para la recta de Euler, basta con encontrar la pendiente entre el baricentro, ortocentro o circuncentro y se hace uso de la ecuación punto pendiente.

Para el baricentro P_1 −1, 4 y el ortocentro P_2 7, 3 se tiene: 3 4 2

3 4 1

m

P

1

P

2

=

2−3 = 6 = 2

7+1 11 33 4 4

y

4

− 3 = 2 (x + 1) 33

y = 2 x + 46 Ecuación geométrica de la recta de Euler. 33 33

$2x + 33y - 46 = 0$ Ecuación general de la recta de Euler.

A 6 y Mediana 5 Alturas P m_BC Mediatriz 4 Recta Euler

3

2 C

Recta Euler

P m_CA

O

1

−5 −4 −3 −2

−3

B 4−

Actividad con Software 4

−1 1 2 3 x

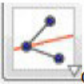
−1 P m_AB

_2

1. Con la herramienta segmento

, cree un triángulo que tenga cualquier longitud en sus lados.

2. Con la herramienta bisectriz



que está en el menú desplegable

del botón recta perpendicular, encuentre la bisectriz de los ángulos A, B y C; para ello debe tocar los vértices del triángulo, es decir, si va a sacar la bisectriz al A, debe hacer clic en los vértices B, A, C.

3. Con la herramienta intersección entre objetos

que está en el

menú desplegable del botón nuevo punto, seleccione 2 de las bisectrices, él generará el punto de intersección entre ambas rectas, el cual es el incentro.

4. Seleccione cada una de las bisectrices, dé clic derecho y seleccione

la opción "muestra objeto", esto oculta el objeto seleccionado pero permanece en el panel de objetos, el cual puede hacer visible en cualquier momento. Esto deja en la zona gráfica el triángulo y el incentro.

Práctica No. 4

En el Cd busque la carpeta geogebra, abra el archivo punto P.ggb y realice la actividad.

2.3.14. Área del triángulo

Para determinar el área[13] de un triángulo ΔABC cualquiera, se puede utilizar:

2.3.14.1. La fórmula de Herón

Sean A, B y C los vértices de un triángulo dado, entonces si se conoce la longitud de los lados del triángulo, el área está dada por:

$A_\Delta = S(S - a)(S - b)(S - c)$
Donde a, b y c son la longitud de los lados del triángulo.
Para determinar S, que es el semiperímetro del triángulo, se utiliza:
$S = \frac{a+b+c}{2}$

2.3.14.2. Determinantes

Sean A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3) los vértices de un triángulo dado, entonces el área del triángulo mediante determinantes es:

x1 y1 1 y2 1 y_1 x2 1 + 1 x2 y2 $A_\Delta = ^1 x_2\ y_2\ 1 = ^1$
2 2 x1 $y_3\ 1 - x_3\ 1\ x_3\ y_3$ x3 y3 1

$A_\Delta = \frac{1}{2}\left| x_1 (y_2 - y_3) - y_1 (x_2 - x_3) + (x_2 y_3 - y_2 x_3)\right|$ por determinantes

$A_\Delta = \frac{1}{2}\left| x_1 y_2 - x_1 y_3 - y_1 x_2 + y_1 x_3 + x_2 y_3 - y_2 x_3\right|$ por distributividad.

Entonces, el área de un triángulo mediante el uso de determinantes está dado por:

[13]El área es la superficie comprendida dentro de una figura plana.

$A_\Delta = \frac{1}{2} [x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_1 x_3 - x_1 y_3 - y_1 x_2 - y_2 x_3]$

Ejemplo

Dado el triángulo, cuyos vértices son: A (–2, 1) , B (1,–3) y C (2, 2) encuentre el área de dicho triángulo, mediante determinantes y la fórmula de Herón.

Solución

y C(2, 2) Mediante Determinantes b 2 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$ A(−2, 1) $y_1 = 1$, $y_2 = -3$ y $y_3 = 2$ 1
x

Entonces

$A_\Delta = \frac{1}{2}[(-2)(-3) + (1)(2) + (1)(2)$ −2−1 1 a2
c $-(-2)(2) - (1)(1) - (-3)(2)]$ −

A

$A_\Delta = \frac{1}{2}[6 + 2 + 2 + 4 - 1 + 6]$

$A_\Delta = \frac{1}{2}[19]$ −2

$A_\Delta = \frac{19}{2} = 9{,}5$

−3 B(1,−3)

Mediante la fórmula de Herón

Primero se deben encontrar las distancias entre los vértices:

–

D

AB

=

(1

−

(

−

2))

$^2 + (-3 - 1)^2$ $D_{AB} = (3)^2 + (-4)^2 \Rightarrow \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{25} = 5$

−

D

AC

=

(2

−

(

−

2))

$^2 + (2 - 1)^2$ $D_{AB} = (4)^2 + (1)^2 \Rightarrow \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{16 + 1} \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{17} = 4{,}12$

−

D

BC

=

(2

−

1)

$^2 + (2 - (-3))^2$ $D_{AB} = (1)^2 + (5)^2 \Rightarrow \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{1 + 25} \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{26} =$
5,09

Luego, encontramos el semiperímetro $S = ^{5+4,12+5,09}$ $S = ^{14,21}$ $S =$
$7{,}11_{2} \Rightarrow {}_{2} \Rightarrow$

Entonces:

$A_{\Delta} = 7{,}11\ (7{,}11 - 5)\ (7{,}11 - 4{,}12)\ (7{,}11 - 5{,}09) \Rightarrow A_{\Delta} = \sqrt{90{,}6} \Rightarrow A_{\Delta} = 9{,}5$

2.3.15. Ejercicios propuestos de triángulos

1. Determine el área de la región sombreada, sabiendo que los vértices del paralelogramo son:

D_3 y

$E\ ^2$A = (−6, 1), B = (−4, −1),

C = (−1, 1), D = (−3, 3), donde A C1 E es el punto medio de AD y F esxel punto medio de CD

−6 −5 −4 −3 −2 −1

B− 1

2. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son:

a. A = (3, 2); B = (−1,−2) y C = (5,−4) b. A = (−2, 1); B = (5, 2) y C = (2,−3)

3. Dos vértices de un triángulo equilátero son A(2, 3) y B(5, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

4. Clasifique el triángulo ABC (según sus lados y ángulos) cuyos vértices son:

a. A = (−4,−1), B = (−2, 3), C = (2, 1)

b.
A
= (
−
4
,
1)
, B
= (
3
−2, 5), C = (3, 1)2

c.
A
= (
4)
, C
= (
−51
4, 7,93)

d. A = (−2, 2), B = (10,−3, 5), C = (−2, 1)−1,−1), B = (−2 2 2

5. Calcule la longitud de las medianas del triángulo, cuyos vértices son:

A = (−5, 2), B = (−7, 6), y C = (3, 2) 6. Calcule la coordenada ortocentro del triángulo, cuyos vértices son:

A = (−6,−2), B = (−4, 6), y C = (3, 5)2

Actividad No. 3

Una fábrica de bicicletas, piensa lanzar al mercado un nuevo modelo para carreras. Para ello le envía a usted una foto y un modelo donde le pide determinar ciertos aspectos de la bicicleta, para saber si coinciden con las medidas técnicas exigidas; entonces le solicitan hacer los cálculos pertinentes y enviar sugerencias (los puntos que no tienen coordenadas se deben encontrar de forma algebráica, no contando la cuadricula).

y

D

(-5,10)

$-2x+9y=62$ E

C

$=5$ $+5$ $+7$

$=-25$ x A F

B

Figura 2.5: Nuevo modelo de bicicleta de Carreras.

1. ¿El soporte del asiento DC está alineado con respecto a la base de la bicicleta BC?
2. Clasifique el triángulo (por lados y por ángulos) que conforma la parte superior del marco BCE.
3. ¿Qué área Cubre la parte superior del marco ABC? 4. ¿Qué distancia hay entre cada soporte de las llantas F y A a la base del pedal B?
5. ¿Qué distancia hay entre el soporte de la llanta delantera F y el tubo soporte del pedal al manubrio BE?
6. El freno trasero se debe colocar bajo una relación r = ^{2}; ¿En que$_{5}$ coordenada estaría? y ¿por qué?

2.4. Actividad general

En la ciudad X se presentó un robo. Los delincuentes huyeron en una moto y un vehículo, a usted le llega una imagen satelital, tal como puede observarse en la siguiente figura, se aprecian tres (3) autos de policia, la moto, la niña del parque, una bicicleta y un auto particular.

y

ca rre ra[7]*ca rre ra ca rre ra*[8]

x

carrera 9

Usted debe determinar ciertas características.
1. La policía atiende el llamado y enviaa tres (3) patrullas. Determine el perímetro[14] y el área que delimitan las patrullas.

2. La niña que está en el parque ve la moto sospechosa pasando al frente de ella, ¿A qué distancia está la niña de la moto? Sabiendo que la moto va por la carrera octava, la cual sigue la trayectoria de $4x–8y = 4$.
3. Encuentre la ecuación que satisface la calle 6, tomando como referencia la patrulla que va por esa calle.

[14]Es la medida del contorno (borde) de una figura.

4. La carrera octava está a una distancia de 900 metros de la carrera 6. Encuentre la ecuación que satisface la carrera sexta. 5. Determine ¿Qué hay en medio de las patrullas que van por la calle 6 y por la carrera 7, de las coordenadas de este edificio?.

6. Las patrullas de la carrera 7 encierran al auto sospechoso, este vehículo está a una relación de 3/5. Determine la posición exacta del vehículo.

7. La calle 4 con la calle 5, a la altura de la carrera 9 se forma una ángulo. Encuentre el ángulo formado por estas 2 calles (para encontrar la recta tome como referencia el vehículo de policía y la bicicleta).

2.5. Crucigrama unidad 2

1. Cuando dos rectas tienen pedientes inversas se dice que son…
2. El eje x también recibe el nombre de eje de las… 3. Cuándo una relación que corta a un segmento r = 1 se dice que es

4. Cuando una recta esta de la forma $Ax + By + C = 0$, se dice que esta en su forma…
5. El punto donde se encuentran las alturas se llama…

6. El punto en el que se unen los dos lados de un ángulo se llama…
7. Trozo de recta limitado por dos puntos.

11. Para encontrar un vértice dados los lados, se puede utilizar...
12. La ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ recibe el nombre de...
8. El área de un triángulo se puede hallar mediante la fórmula de...
9. La ecuación $tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ sirve para encontrar
10. Rectas que van del vértice al punto medio del lado opuesto.
13. Longitud del contorno de una figura geométrica.
14. Dados dos (2) puntos, la diferencia de las ordenadas sobre las abcisas recibe el nombre de...
15. La ecuación normal de una recta tiene la misma pendiente pero un punto distinto, esta se denomina...

2.6. Cuestionario unidad 2

Las siguientes preguntas constan de un enunciado y 4 posibles respuestas, de las cuales una es verdadera:

1. Si una recta de la forma $y = mx + b$, en donde la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a}{0}$ o sea la pendiente es una indeterminación, se puede decir que:

a) Es una recta imaginaria c) Es una recta paralela al eje y b) Es una recta paralela al eje x d) No es posible una recta

2. La ecuación de una línea recta es $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$. La forma implícita de dicha ecuación es:
a) $2x + 6y + 15 = 0$ b) $4x + 6y + 15 = 0$ c) $6x + 4y - 15 = 0$ d) $2x + 3y + 5 = 0$

3. El punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 6 = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$ es:
a) $(3, -2)$ b) $(1, 2)$ c) $($ 3 1

4. La ecuación de la recta cuya intersección con el eje x es 3 y con el eje y es 2 está dada por:

a) $2x + 3y - 6 = 0$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = 6x + 2$ d) $3x + 2y = 6$

5. Las medianas de un triángulo concurren en un punto denominado:

a) Circuncentro c) Incentro

b) Ortocentro d) Baricentro

6. Los puntos A = (-3, 2) y B = (5, -2) son colineales con el punto:

a) C = (-2, 2) b) C = ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)

c) C = (2, $\frac{1}{4}$) d) C = (0, $\frac{1}{2}$)

7. Un triángulo isoceles es aquel que:

a) Sus ángulos internos suman 180^o b) Sus tres ángulos son iguales

c) Dos de sus ángulos son iguales d) Su hipotenusa es igual a la suma de sus catetos

8. De la ecuación general de la línea recta $Ax + By + C = 0$, se dice que el corte con el eje y es:

a) $-C$ b) C $-A$ c) $\frac{A}{C}$ $-B$ d) $-B$

9. El ángulo de inclinación de la recta formada por los puntos A = (-8, -4) y B = (5, 9) es

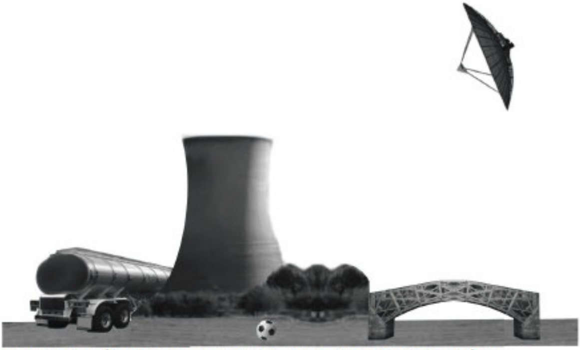
a) 45 grados b) -1 grado c) 1 grado d) 90 grados

10. La ecuación de la recta que pasa por el punto P = (2, 1) y que es paralela a la recta $4x - 2y = 3$

a) $y = 2x - 5$ b) $y = 2x + 3$ c) $2x - y - 3 = 0$ d) $2x + y - 3 = 0$

CAPÍTULO3

SECCIONES CÓNICAS



"Las matemáticas son el lenguaje en el que Dios escribió el universo".
Galileo Galilei.

A lo largo de los años hemos apreciado la evolución de las secciones cónicas, las cuales han sido empleadas en construcciones antiguas como en cúpulas, arcos e iglesias y modelos arquitectónicos modernos e innovadores, estas son apreciables en la vida cotidiana como en una bicicleta, en una estación de metro, puentes, entre otros.

73

Toda sección cónica puede obtenerse de la intersección de una superficie cónica con un plano, cuya distancia dirigida a un punto fijo y una recta fija es una razón constante e; dependiendo de la inclinación del plano, la sección cónica cambia. La ecuación de toda sección cónica es una ecuación de segundo grado de dos variables de la forma:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde al variar los parámetros A, B, $_\wedge$ C generan el lugar geométrico [1] de alguna de las secciones cónicas.

3.1. La circunferencia

"Inútil es la labor del que se fatiga y intentando cuadrar el círculo".

X

Stiffel

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que son equidistantes[2] de otro punto fijo llamado centro C. Si se ubica la circunferencia en un plano, haciendo coincidir el centro de esta con el origen del plano, la distancia entre el centro y los puntos fijos es constante.

[1] Es el conjunto formado por todos los puntos que tienen cierta propiedad y sólo ellos la cumplen.

[2]Igual distancia.

y Como son equidistantes se debe usar la fórmula de distancia $_{P(x,y)}$
entre los puntos P y C
el origen tiene coordenada C(0, 0)$_{\text{Radio x}}$
C(0, 0) entonces $r = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$
luego $r = (x)^2 + (y)^2$ eliminando la raiz $r^2 = x^2 + y^2$
Figura 3.1: Circunferencia

Por lo tanto, la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen, está dada por:

$x^2 + y^2 = r^2$

Donde, r es una distancia constante que va del centro a cualquier punto de la circunferencia, llamada radio de la circunferencia; en donde:

– Si $r > 0$ Es una circunferencia real, ya que el radio es positivo.

– Si $r < 0$ La circunferencia no está definida o es una circunferencia imaginaria, ya que el radio es negetivo y no tiene solución en los R.

– Si $r = 0$ La circunferencia no tiene radio, lo que genera un punto.

Ejemplo

Encuentre el punto P = (x, y) que equidiste del origen cuatro (4) unidades.

Solución

Para encontrar la coordenada del punto P, se debe tomar la ecuacíón de distancia entre los puntos P = (x, y) y O = (0, 0):

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 = 16$

4 y

2

$-4 -2\ 2\ 4^{x}$

-2

-4

Lo que indica que el punto P = (x, y) es cualquier punto que está sobre la circunferencia, con centro en el origen y radio 6.

3.1.1. Elementos de una circunferencia

La circunferencia tiene asociada a ella varios elementos que son:
Figura 3.2: Elementos de la circunferencia.

Radio: es la distancia del centro C a cualesquier punto que limita la circunferencia, se denota por r.

Cuerda: es el segmento de cuerda limitado por dos (2) puntos que están sobre el límite de la circunferencia.

Diámetro: es la cuerda de mayor longitud, esta pasa por el centro de la circunferencia y equivale a dos (2) radios, es decir 2r.

Recta tangente: es la recta que toca en un sólo punto a la circunferencia, si el punto es externo a la circunferencia, ésta tiene dos (2) rectas tangentes, si el punto es sobre la circunferencia sólo tiene una recta tangente.

Recta secante: es la recta que atraviesa a la circunferencia y la toca en dos (2) puntos.
entre dos (2) radios o una cuerda, se han llamado sector circular, si está comprendido entre los radios, o segmento circular si está comprendido por una cuerda.

Área del circulo: es la región limitada por una circunferencia y esta dada por $A = \pi r^2$.
Arco: es la porción de curva de la circunferencia, comprendida
La perpendicular a la tangencia cruza por el radio de la circunferencia.

Longitud de la circunferencia: es el producto del diámetro por π, es decir: $L = 2\pi r$.
recta tangente en el punto de
La perpendicular a una cuerda en el punto medio cruza por el radio

3.1.2. Circunferencia con centro fuera del origen

Si el centro de la circunferencia se desplaza h unidades en el eje x y k unidades en el eje y, obtenemos:

y
El centro tiene la coordenada C(h, k) entonces la distancia entre P y C$_{P\ (x,\ y)}$

$_k$ C es $r = (x - h)^2 + (y - k)^2$ eliminando la raíz

queda $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

donde el centro de la circunferencia$_x$ es C = (h, k).

Figura 3.3: Circunferencia con centro en C(h, k).

La ecuación de la circunferencia está dada por:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Observe que las coordenadas del centro C = (h, k) tienen signo opuesto a los que aparecen en la ecuación.

Ejemplo

a. Dada la ecuación de la circunferencia $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 49$, determine el centro y el radio.

b. Dado C = (−3, 5) el centro de la circunferencia y el radio r = 5, encuentre la ecuación canónica de la circunferencia.

Solución

a. Como el centro está dado por C = (h, k) y en la ecuación es x = −h, $\wedge$, y = − k entonces h = 8 y k = −6, luego el centro de la circunferencia es C = (8,−5) y como el r^2, entonces el radio es r = 7.

b. Como la ecuación está dada por $(x - h)^2+(y - k)^2 = r^2$, entonces reemplazo las coordenadas dadas, luego $(x - (-3)) + (y - (5))^2 = 5^2$, entonces $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ es la ecuación canónica de la circunferencia con centro en C = (−3, 5) y radio 5.

Práctica No.5

En el cd busque la carpeta Apples y abra el archivo con nombre lugar_geometrico.htm y responda las siguientes preguntas:

– ¿Qué pasa si mueve el punto B?
– ¿Qué pasa si mueve el punto A?
– ¿Qué nombre le colocaría al punto A y C?

3.1.3. Ecuación general de una circunferencia

Analíticamente, una circunferencia es una ecuación de segundo grado con 2 variables de la forma:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo

a. Se desea hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en C = (−2, 1) y radio r = 5.

b. Dada la ecuación general de la circunferencia x^2+y^2 6x+4y −3 = 0, determine la ecuación canónica, del centro y el radio.¯

Solución

a. Para solucionar este ejercicio debemos usar la ecuación de la circunferencia de centro en C = (h, k), como:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ entonces $(x - (-2))^2 + (y - (1))^2 = 5^2$ luego $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$ resolviendo el binomio al cuadrado se obtiene $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ organizando y sumando términos semejantes

Por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia con centro en C = (−2, 1) y radio r = 5 es $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

b. Dada la ecuación $x^2 + y^2$ 6x + 4y − 3 = 0 se deben completar cuadrados:¯

$x^2 + -6x + y^2 + 4y = 3$ se organizan términos semejantes. Para completar cuadrados se toma la variable lineal y se divide entre 2 y luego se eleva al cuadrado. Este valor se debe sumar en ambos lados de la igualdad entonces

$x^2 + -6x + (3)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 = 3 + 9 + 4$ $(x^2 + (y + 2)^2 = 16 - 3)$ entonces, C = (3, −2) y el radio es r = 4.

3.1.4. Relación entre la ecuación general y la canónica

Para establecer una relación entre ambas ecuaciones, se parte de la ecuación general y completan cuadrados para llegar a la ecuación canónica.

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$ organizamos variables

$x^2 + Dx +^{D\ 2} + y^2 + Ey +^{E\ 2} = -F +^{D\ 2} +^{E\ 2}$. Sumamos a$_{2\ 2\ 2\ 2}$ambos lados de la igualdad para completar cuadrados

$x +^{D\ E\ 22} + y\ _{-\ 2} = -F +^{D2} +^{E2}$ Factorizando[3] al lado izquierdo$_{2\ 4\ 4}$ y utilizando propiedades de los exponentes al lado izquierdo, entonces el centro de la circunferencia está dado por:

C

=

D E

$-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}$ [3]Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Como el radio está al cuadrado, entonces:

$r^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ Eliminando el cuadrado.

$r = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ para eliminar un cuadrado se saca raiz cuadrada en ambos lados de la igualdad[4].

$r = -\frac{4F}{4} + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ suma de fracciones homogeneas.

$r = \frac{-4F+D^2+E^2}{4}$ por propiedades[5] de las raices

$r = \frac{\sqrt{-4F+D^2+E^2}}{\sqrt{4}}$ por lo tanto, el radio de la circunferencia en la forma general está dado por:

$$r = \frac{\sqrt{-4F+D^2+E^2}}{2}$$

Ejemplo

a. Determinar el centro y el radio de la circunferencia, cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 6x - 3y - 11 = 0$

b. Determinar las ecuaciones de la circunferencia (canónica y general) que pasa por los puntos $A = (1, -2)$, $B = (5, 4)$ y $C = (10, 5)$ de dos (2) formas diferentes.

Solución

a. Como el centro de la circunferencia es

$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ entonces, $Dx = 6x \Rightarrow D = 6$ y $Ey = -3 \Rightarrow E = -3$

por lo tanto el centro de la circunferencia es:

$C = \left(-\frac{6}{2}, -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow C = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$ El radio está dado por $r = \frac{\sqrt{-4F+D^2+E^2}}{2}$, reemplazando se tiene que:

$r = \frac{\sqrt{-4(-11)+(6)^2+(-3)^2}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{44+36+9}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{89}}{2} \Rightarrow r \approx 7{,}72.$

$^4\sqrt{a^2} = a_5$

a = √a b √b

b. Determinar las ecuaciones de la circunferencia (canónica y general) que pasa por los puntos A = (1,−2), B = (5, 4) y C = (10, 5) de dos formas diferentes.

Forma No. 1

Tomando como referencia la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y la coordenada de los puntos P (x, y) se reemplazan dichos valores en la ecuación general, entonces:

para $A = (1,-2) \Rightarrow (1)^2 + (-2)^2 + (1) D + (-2) E + F = 0$ entonces $5 + D - 2E + F = 0 \Rightarrow D - 2E + F = -5$ ec.1 para $B = (5, 4) \Rightarrow (5)^2 + (4)^2 + (5) D + (4) E + F = 0$ entonces $41 + 5D + 4E + F = 0 \Rightarrow 5D + 4E + F = -41$ ec.2 para $C = (10, 5) \Rightarrow (10)^2 + (5)^2 + (10) D + (5) E + F = 0$ entonces $125 + 10D + 5E + F = 0 \Rightarrow 10D + 5E + F = -125$ ec.3

Debemos hacer reducción de ecuaciones dos a dos.

Tomando ec.1 y ec.2

$D - 2E + F = -5$ $5D + 4E + F = -41$

$D + 2E - F = 5$−

$5D + 4E + F = -41$ $4D + 6E = -36$

Tomando ec.2 y ec.3 multiplicamos la ec.1 por (-1) se tiene:

ec.4

multiplicamos la ec.2 por (-1) entonces:

$-5D - 4E - F = 41$

$10D + 5E + F = -125$

$5D + E = -84$ ec.5 Tomando ec.4 y ec.5:

$4D + 6E = -36$ multiplicamos la ec.5 por (-6) $5D + E = -84$

$4D + 6E = -36$

−

30

D

−

6

E

= 504

entonces

D

=

468

-26 luego $D = -18 \cdot -26$ $D = 468$

Seguidamente se debe reemplazar la variable encontrada (D) en alguna de las ecuaciones 4 o 5.

Reemplazando D en ec.5

$5(-18) + E = -84 \Rightarrow E = -84 + 90 \Rightarrow E = 6$

Como ya se tienen dos (2) variables (D y E) se reemplaza en alguna de las ecuaciones 1, 2 o 3.

Reemplazando D y E en la ec.1 $D - 2E + F = -5$ entonces:

$-18 - 2(6) + F = -5 \Rightarrow F = -5 + 30 \Rightarrow F = 25.$

Teniendo las tres (3) variables, se reemplaza en la ecuación general, entonces se tiene que:

$x^2 + y^2 + -18x + 6y + 25 = 0$ para encontrar la ecuación canónica buscamos el centro y el radio, como:

C

= (

h, k

)

y como

h

=

D E

-2 y $k = -2$, entonces: $C = (9, -3)$

$r^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$ entonces:

$r^2 = \frac{(-18)^2+(6)^2-4(25)}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{260}{4} \Rightarrow r^2 = 65$

luego la ecuación canónica está dada por $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 65$

Forma No. 2

Se deben encontrar dos (2) de las mediatrices y el circuncentro, que sería el centro de la circunferencia

y R

4

1. Se buscan los puntos medios: 5 Q P mQR3

P m

P Q

=

1+5 , ₋2+4 2

2 2 ⇒ 1 P m P Q x

₋1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1011121314151617 P m

P Q

= (3

,

1)

₋2 P C(h, k)

₋3

₋4

₋5

₋

6

P m_{QR} = 5+10, 4+5₋7 2 2 ⇒ −8

₋9

₋10

P m

P Q

=

15 , 9₋11

2 2

2. Se debe buscar la pendiente y la pendiente inversa para la recta perpendicular:

m

P Q

=

4+2 m_{PQ} = 3

5₋1 ⇒2 m

QR

= 1 m_{QR} = 5₋4

$10 - 5 \Rightarrow 5$

3. Encontrando la pendiente inversa:

(

m

P Q

)

–

$^1 = -\ ^2$

3

$^1\ (m_{PQ}) = -32 \Rightarrow$

(

m

QR

)

–

$^1 = -^1$

$_1\ (m_{PQ}) = -5$

$_5 \Rightarrow$

4. Encontrando la ecuación de la mediatriz con punto pendiente:

y

–

1 =

2 2 2

$_{-3}\ (x - 3) \Rightarrow y = -_3x + 2 + 1 \Rightarrow y = -_3x + 3 \Rightarrow y =$

$-\ ^{2x+9}\ 3y = -2_x + 9 \Rightarrow 2x + 3y = 9_3$

$y^{2\,2\Rightarrow\,2}\ (x - 3) \Rightarrow y = -\ _3x + 2 + 1 \Rightarrow y = -_3x + 3 \Rightarrow y =$

$-^{2x+9\ -\ 1\ =\ -3}\ 2_x + 9 \Rightarrow 5x + _y = 42_3 \Rightarrow 3y = -$

Para encontrar el Circuncentro se igualan las mediatrices:

$2x + 3y = 9$

$5x + y = 42\ (-3)$

$2x + 3y = 9$

$-15x - 3y = -126$ despejando x se tiene $x = ^{13}\ x = 9\ -13x = -117^{117} \Rightarrow$

reemplazando en alguna ecuación $2(9) + 3y = 9 \Rightarrow 3y = -9 \Rightarrow y =$

$^9\ y = -^3 -3 \Rightarrow$

entonces, $C = (9, -3)$

5. Encontrando el radio (se toma un punto y el centro):

r
=
(9
−
1)
$^2 + (-3 + 2)^2$ r = $8^2 + (-1)^2$
$\Rightarrow \Rightarrow r = \sqrt{65} \Rightarrow$
$r^2 = 65$
con el centro y el radio encontramos la ecuación canónica de la circunferencia:
$(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 65$ para encontrar la ecuación general se resuelve los binomios:

$$x^2\ 18x+81+y^2+6y+9-65 = 0 \Rightarrow x^2+y^2+-18x+6y+25 = 0-$$

Actividad con Software 5

Un punto de coordenadas P = (x, y) se mueve en cada instante t, bajo la propiedad $x = h + r\cos(t)$, $y = k + r\,\mathrm{sen}(t)$. Hacer una construcción que muestre que el punto P, al moverse, describe una circunferencia de centro C (h, k) y radio r.

3.1.5. Ejercicios propuestos de la circunferencia

Para cada ejercicio del 2 al 17 es necesario graficar: 1. Complete cada una de las oraciones

a. Una circunferencia es real cuando: ________, imaginaria cuando ________ o un punto si: ________

b. La ecuación general de la circunferencia es: ________, de allí decimos que el centro es ________ y el radio esta dado por ________

c. La cuerda mayor que se puede trazar en una circunferencia se denomina ________.

2. Encuentre la ecuación general de la circunferencia para cada ítem bajo la condición dada.

a. Centro en C = (
^{1} y radio r = 6.
c. Centro en C =

–
1, 2) y radio $r = 4$.
b. Centro en $C = 2, -57$ y radio $r = 5$.
d. Centro en
C
=
–8, –2 2
4, ^{5} y radio $r = 7$.2

e. El segmento que une $A = (-2, 6)$ y $B=(6,-8)$ es el diámetro. f. Centro en $C = (-5,-5)$ y pasa por el punto $P = (4, 4)$. g. Centro en C $= (-3, 7)$ y es tangente a la recta $4x + y - 15 = 0$

3. En cada uno de los siguientes ejercicios, reduzca cada ecuación general a la forma canónica.

a. $x^2 + y^2 + 10y - 100 = 0$ c. $x^2 + y^2\ 16x + 8y - 100 = 0$ b.
$x^2 + y^2 + 20x + 16y - 740 = 0$
d.
$x^2 + y^2 - +40x - 20y - 1500 = 0$

4. En cada uno de los siguientes ejecicios determine ¿Cuáles de las ecuaciones representan una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria?.

a. $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 18 = 0$ c. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 24 = 0$ b. $x^2 + y^2\ 2x + 6y - 16 = 0$ d. $x^2 + y^2\ 3x + y + 12 = 0$– –

5. Encuentre la ecuación de la recta tangenta a circunferencia C en el punto P

a. $x^2 + y^2$ 2x – 4y + 1 = 0, P = (–1, 2)

b. $x^2 + y^{2-}$ 2x + 2y – 8 = 0, P = (2, 2)

c. $x^2 + y^2 + 9x^{3-9}$,–2

d.

x

2

+

y

2

12

– 2y + 15 = 0, P =–2

x– 20y + 36 = 0, P = (–2, 4)–

6. El punto medio de la cuerda de una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2$ 20x – 125 = 0 en P_m =5, 15 , encontrar la ecuación de la cuerda.– 2 2

7. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A = (6,–4) y B = (15, 6) y cuyo centro está sobre la recta 3x –5y +15 = 0.

8. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A = (–1,–2), B = (2, 3) y C = (–2, 2).

9. Hallar la ecuación de la circunferencia, que tiene por diámetro el segmento interceptado por los ejes coordenados y la recta 5x–2y + 10 = 0.

10. Encontrar la ecuación de la circunferencia que sea cocéntrica[6] con $x^2 + y^2$ + 6x + 4y + 8 = 0 y que pase por el punto P (–4,–1)

11. Dada la circunferencia x^2+y^2 12x–6y = –40, encuentre todas– las rectas de pendiente 2 que sean tangentes a dicha circunferencia.

12. Encuentre el punto de tangencia entre la recta –2x + y + 6 = 0 y la circunferencia $x^2 + y^2$ 6x + 10y = –29.–

13. Encuentre la longitud de la cuerda generada entre la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$ y la recta 3x + y + 3 = 0.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas 3x–2y –24 = 0 y 2x+7y +9 = 0.

15. La circunferencia C_1 con ecuación $x^2 + y^2 2x + 2y = 6$, es cocéntrica con otra circunferencia C_2. La circunferencia C_1 es cortada [6]Circunferencia con mismo centro pero radio diferente por una recta secante, cuya ecuación esta dada por

$y = \frac{1}{2}x + 4$, esta recta secante a C_1 es tangente a una cirnferencia C_2; determine la ecuación de la circunferencia C_2.

16. Hallar los puntos de intersección de las circunferencias $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 50$ y $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 24 = 0$,.

16. Comprobar que el circuncentro de un triángulo formado por los puntos $A = (2, 3)$, $B = (6, 4)$ y $C = (7, 1)$ es el centro de la circunferencia que pasa por los mismos puntos.

17. Dadas las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 8x + 8y = -31$, $C_2 : x^2 + y^2 + 6x - 4y = -11$ y $C_3 : x^2 + y^2 -$

8 x + 4y = –18 encontrar el–
área del triángulo formado por el centro de las circunferencias C_1, C_2 y C_3

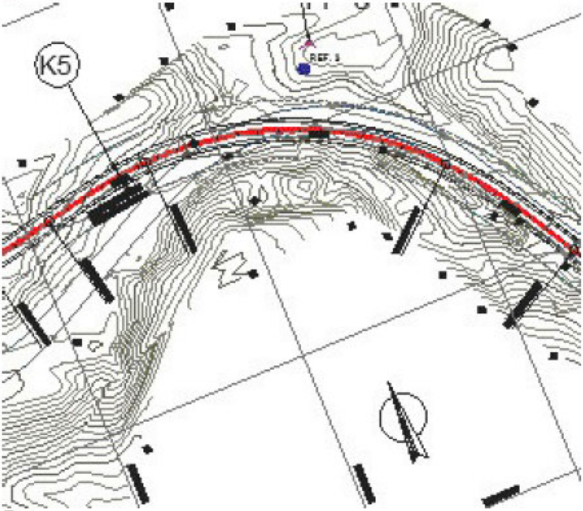
3.1.6. Aplicación de la circunferencia

Los elementos de la circunferencia como el radio, las cuerdas y las tangentes, hacen posible hacer la construcción de una curva simple[7] en una vía, debido a la topografía de ciertos lugares, que no permiten la construcción de una vía en línea recta.
Los elementos que intervienen son:

P_{int}

P P R_t Rt

E



R_R

Ángulo de deflexiónΔ: el que se forma con la prolongación de uno de los alineamientos rectos y el siguiente. Puede ser a la izquierda o a la derecha

Recta tangente R_t: distancia desde el punto de intersección de

las tangentes P_{int} hasta cualquiera de los puntos de tangencia de la curva P_t, los alineamientos rectos también se conocen con el nombre de entretangencia si se trata
del tramo recto que queda entre dos curvas.
Radio R: el de la circunferencia que describe el arco de la curva.
[7]Las curvas circulares simples, se definen como arcos de circunferencia de un sólo radio, que son utilizados para unir dos (2) alineamientos rectos de una vía.

Cuerda larga: línea recta que une los puntos de tangencia P_t.
Externa E: distancia desde el punto de intersección de las tangentes P_{int} al punto medio de la curva sobre el arco.
Longitud de la curva L: distancia desde los puntos de tangencia P_t, recorriendo el arco de la curva.

El caso más común de la circunferencia, esta en los movimientos telurico, donde se aplica para mostrar el movimiendo de una onda sísmica desde el hipocentro (punto donde se inicia un sismo al interior de la tierra) hasta alcanzar el epicentro o punto en la superficie de la tierra donde ocurrió el sismo.

Otro caso son los engranajes en donde se desea saber la longitud de una banda que pasa por varios engranes o una cadena para moto o bicicleta.

Falla Epicentro Hipocentro

3.2. Ejercicios de aplicación circunferencia

1. Una estación de gasolina A tiene riesgo de explosión, por seguridad se ha despejado a la población en un radio de 400 mtrs a la redonda. a 300 mtrs al sur y 300 mtrs al oriente, se encuentra otra estación de gasolina B, se desea saber si en caso de explosión de la estación A afectaria la estación B.

2. La correa de un motor de un vehiculo debe pasar por el sigueñal, el arbor de levas y el patin, las cuales siguen las ecuaciones de las circunferencias $a : (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 1$, $b : (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$ y $c : (x - 2)^2+(y + 1) = 9$, si la correa debe pasar por estos tres engranes y las rectas comunes son: $ac : y = 3{,}46x+ 2{,}89$, $ab : y = -1{,}12x+ 12{,}38$, $bc : y = 1{,}52x - 9{,}51$, determine la longitud de la correa.

3.3. La parábola

"Las matemáticas poseen no só
lo la verdad, sino cierta belleza
suprema. Una belleza fría yy austera, como la de una escultura."

X

Bertrand Russell

Una parábola es el conjunto de todos los puntos en un plano, que son equidistantes de un punto fijo F llamado foco y una recta fija llamada directriz, la distancia entre el foco y la directriz es 2a. El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice, se representa con V .

3.3.1. Ecuación canónica con vértice en el origen

Si el origen del plano cartesiano coincide con el vértice de la parábola, éste se representa con V = (0, 0). La coordenada del foco es F = (a, 0) y la ecuación de la directriz es $x = -a$ o $x + a = 0$. Cualquier punto P (x, y) que pertenezca a la parábola, dista lo mismo del foco que la directriz, es decir:

$(x - a)^2 + (y - 0)^2 = x + a$ pasa por el foco.

$$(x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x + a)^2$$

y

elevando al cuadrado ambos laP (x, y) dos

x

^{2} $2ax+a^2+y^2 = x^2+2ax+a^2$ P2 $-$P3 Resolviendo los binomios F (a, 0) x

$y^2 = 4ax$ despejando la vari2a
able y.

Donde $|4a|$ representa la longitud del lado recto; el lado recto es la cuerda paralela a la directriz y Por lo tanto, la ecuación de la parábola está dada por:

$y^2 = \pm 4ax$ y $x^2 = \pm 4ay$

El signo $\pm$ depende de la ubicación del foco:

– La ecuación es $y^2 = 4ax$ si el – La ecuación es $x^2 = -4ay$ si foco pertenece al eje x el foco pertenece al eje y y y F x_F

x

– La ecuación es $y^2 = -4ax$ si – La ecuación es $x^2 = -4ay$ si el foco pertenece al eje x el foco pertenece al eje y y y

F_{xx} F
La gráf ica de la parábola abre siempre hacia la v ariable que esté lineal.

Ejemplo

Encuentre la ecuacíon de la parábola, cuyo vértice está en el origen y el foco tiene coordenada F = (−3, 0) y grafique.

Solución

Observe que el foco pertenece al eje y y a < 0, por lo tanto, se toma la ecuación $x^2 = 4ay$, sabiendo que a = −3.

$x^2 = 4(-3)y$

$x^2 = -12y$ y

3 0 x = 3 1.5

x 6.0−4.5−3.0−1.5 1.5 3.0 4.5− 1.5−

−3.0 F (−3, 0)

3.3.2. Ejercicios parábola con vértice en el origen

1. Grafique cada una de las siguientes parábolas, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz, al igual que la longitud de lado recto.

a. $x^2 = {}^1y$ c. $x^2 = 5y$

b.

y

$^2 = ^4$ 2x d. $y^2 = ^3$

−5x −

2. Encuentre la ecuación de la parábola para cada ítem bajo la condición dada.

a. La coordenada del foco es

F

= (0

,

1

−

3

)

b. Vértice en el origen y directriz y = −2

c. Vértice en el origen, el foco pertenece a la parte positiva del eje y y la longitud del lado recto es 5.

d. Vértice en el origen, el foco pertenece a la parte positiva del eje x y tiene un punto en P = (2, 3).

3. Determine la ecuación de la parábola que muestra cada una de las siguientes figuras

y y

x

x

a. b.

y

x

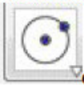
c.

y

d.

Actividad con Software 6

1. Cree una circunferencia



con centro en el origen y cualquier radio.

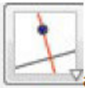
2. Ubique un punto P

sobre la circunferencia creada.

3. Trace un segmento

S_1 del centro de la circunferencia al punto P.

4. Trace una perpendicular



al eje x que pase por el punto P.

5. Cree un punto

Q, de intersección entre la perpendicular y el eje x.

6. Trace un segmento

S_2 entre el punto Q y la intersección de la circunferencia y el eje y

7. Cree un punto de intersección

R entre el segmento S_1 y S_2. 8. Active el trazo al punto R y mueva el punto P.

9. ¿Qué lugar geométrico describe el punto R al mover el punto P?

3.3.3. Recta tangente a la parábola

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola se debe encontrar la pendiente[8] de la recta tangente. La recta tangentea la parábola $y^2 = 4ax$ en cualquier punto P (x_1, x_2) de la curva tiene por ecuación punto pendiente $y - y_1 = m\ (x - x_1)$.

[8]Por cálculo diferencial se puede encontrar la pendiente de la recta tangente mediante la derivada.

Despejando la variable y de la ecuación de punto pendiente, se tiene: $y = mx - mx_1 + y_1$.

Sustituyendo y en la ecuación de la parábola, se tiene:

$(mx - mx_1 + y_1)^2 = 4ax$.

Resolviendo el trinomio al cuadrado se tiene:

$(mx - mx_1)^2 + 2\ (mx - mx_1)\ (y_1) + (y_1)^2 = 4ax$

$(mx)^2\ 2\ (mx)\ (mx1) + (mx1)^2 + 2\ (mx)\ (y1) - 2\ (mx1)\ (y1) + (y1)^2$

$4ax = 0 - -$

$mx)^2\ 2\ (mx)\ (mx1) + 2\ (mx)\ (y1) - 4ax + (mx1)^2\ 2\ (mx1)\ (y1) +$

$(y1)^2 = 0$,(– –organizando términos semejantes

$m^2x^2\ 2x\ m^2x1 + 2mx(y1) - 4ax + (mx1)^2\ 2\ (mx1)\ (y1) + (y1)^2 = 0-$

–sacando factor común

$m^2x^2 + -2\ m^2x1 + 2m(y1) - 4a\ x + (mx1)^2\ 2\ (mx1)\ (y1) + (y1)^2 = 0-$

Observando que el polinomio resultante es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde:

$a = m^2$

$b = -2m^2x_1 + 2m(y_1) - 4a$

$c = (mx_1)^2 - 2(mx_1)(y_1) + (y_1)^2$

haciendo uso del discriminante $b^2 - 4ac = 0$ se tiene:

$\left(-2m^2x_1 + 2m(y_1) - 4a\right)^2 - 4m^2\left((mx_1)^2 - 2(mx_1)(y_1) + (y_1)^2\right) = 0$

$\left(-2m^2x_1 + 2m(y_1)\right)^2 - 2\left(-2m^2x_1 + 2m(y_1)\right)(4a) + 16a^2 - 4m^4x_1^2 + 8m^3x_1y_1 - 4m^2y_1^2 = 0$

$4m^4x_1^2 - 8m^3x_1y_1 + 4m^2y_1^2 + 16am^2x_1 - 16amy_1 + 16a^2 - 4m^4x_1^2 + 8m^3x_1y_1$

$-4_m y^2 + 16am^2 x 1 - 16amy 1 + 16a^2 = 0^{-1}$

2_1

$4am^2 x_1 + 4amy_1 + a^2 = 0$

$(4ax_1)\, m^2 + (4ay_1)\, m + a^2 = 0$

Factorizando o aplicando fórmula general se encomtra el valor de la pendiente.

Ejemplo

Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la párabola $(x - 3)^2 = 4\,(y - 2)$, en el punto $P = (2, -4)$

Solución

Utilizando la ecuación de punto pendiente se tiene: $y + 4 = m\,(x - 2)$

$y = mx - 2m - 4$ sustituyendo en la ecuacíon de la parábola se obtiene:

$(x^2 = 4\,(mx - 2m - 4 - 2) - 3)$

$x^2\ 6x + 9 = 4mx - 8m - 24-$

$x^2\ 6x - 4mx + 8m + 33 = 0-$

$x^2\ (6 + 4m)\, x + 8m + 33 = 0-$

donde

$a = 1$, $b = -(6 + 4m)$ y $c = 8m + 33$ utilizando el discriminante:

$(6 + 4m)^2\ 4\,(1\,(8m + 33)) = 0-$

$36 + 48m + 16m^2\ 32m - 132 = 0-$

$16m^2 + 16m - 96 = 0$

$m^2 + m - 6 = 0$ factorizando $(m + 3)\,(m - 2) = 0$

$m + 3 = 0$ y $m - 2 = 0$ entonces $m = -3$ y $m = 2$

con el valor de estas pendientes se reemplazan en la ecuación de punto pendiente

$y + 4 = 2\,(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 8$ y $y + 4 = -3\,(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 2$

8

6^c

4

2

-2 2 4 6 8

-2 -4 A

3.3.4. Ecuación canónica con vértice fuera del origen

Si el vértice de la parábola se desplaza h unidades en el eje x y k unidades en el eje y, observe que la ecuación de la directriz es $y = k - a$ y la coordenada del foco es $F = (h, k + a)$, de este modo obtenemos:

y

P (x, y) F (h, k + a)

k

Directriz

$y = k - a$

h^x

Figura 3.4: Parábola con vértice en V (h, k).

$(x - h)^2 + (y - (k + a))^2 = (x - x)^2 + (y - (k - a))^2$ por definición de parábola

$(x - h)^2 + (y - (k + a))^2 = (y - (k - a))^2$ elevando al cuadrado en ambos lados

$(x^2 = (y - (k - a))^2$ resolviendo cuadrados

(

x

−

$h)^2 + (y - (k + a))$

h

)

$^2 + y^2\ 2y\ (k + a) + (k + a) = y^2\ 2y\ (k - a) + (k - a)^2 -$

h

)

2

2

y

(

−

\+

a

) +

k

2

\+ 2

ak
+
a
2
−

= −2y (k − a) + k^2 2ak + a^2(x − h)2− k

2y (k + a) + 2ak = −2y (k − a) − 2ak¯(x

$(x - h)^2 -$ 2yk − 2ya + 2ak = −2yk + 2ya − 2ak

(
x
−
h
)
2
−

= −2ay − 2ak + 2ya + 2ya

$(x - h)^2 = -4ak + 4ya$

$(x - h)^2 = -4a(y - k)$ −

De modo similar se define para la parábola que abre sobre el eje x, por lo tanto, la ecuación de la parábola con vértice fuera del origen está dada por:

$(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$

(y y

$^2 = \pm 4a (x - h) - k)$

Observe que al moverse el vértice, el foco también se desplaza, por lo que la coordenada del foco esta dado por:

F = (h + a, k) si la directriz esta al lado izquierdo del vértice F = (h − a, k) si la directriz esta al lado derecho del vértice F = (h, k + a) si la directriz esta debajo del vértice F = (h, k − a) si la directriz esta arriba del vértice.

Ejemplo

Encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la parábola que tiene vértice en el punto V = (−2, 3), la directriz es paralela al eje y y está al lado izquierdo de la parábola, la longitud del lado recto es 12.

Solución

Como la longitud del lado recto es 4a=12 entonces a=3 lo que indica que el foco está a 3 unidades del vértice y la coordenada es

$F = (h + a, k) \Rightarrow F = (-2 + 3, 3) \Rightarrow F = (1, 3)$ Como la directriz es paralela

y

9 al eje y, la parábola esta al lado izquierdo, la parábola debe abrir 8 hacia el lado derecho del eje x, en7 tonces utilizamos la ecuación: 6

5

4 F $(y - k)^2 = 4a (x - h)$ V 3 x

2

1

$(y - 3)^2 = 12 (x - (-2))$ 3−2−1 1 2− 1

−2

Entonces la ecuación de la −3 parábola es: $(y - 3)^2 = 12 (x + 2.)$ −4−

3.3.5. Ecuación general de una parábola

Analíticamente una parábola es una ecuación de segundo grado, con 2 variable de la forma:

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$ $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si la directriz es paralela al Si la directriz es paralela al eje x. eje y.

Ejemplo

Dadas las ecuaciones generales de las parabolas, encuentre su ecuación canónica y gráfique

a. $x^2 \; 2x - 4y + 5 = 0$ b. $y^2 - 6x - 4y + 1 = 0$ −

Solución

a. Para transformar la ecuación a la forma canónica se separan las variables en la igualdad y se completa cuadrados

$x^2 \; 2x - 4y + 5 = 0$ $x^2 - 2x = 4y - 5$

$x^2 - 2x + 1^2 = 4y - 5 + 1$ $(x - 1)^2 = 4y - 4$ −

$(x - 1)^2 = 4 (y - 1)$

Como en la ecuación, la variable lineal es y, entonces la parábola abre hacia este eje, tiene vértice en V = (1, 1), el foco esta a 1 unidad del vértice, debido a que 4a = 4 entonces el foco es F = (1, 2) y la directriz es el eje x

y

3

F = (1, 2)

2

1

-1 1 2 3^x

-1

b. Para transformar la ecuación a la forma canónica se separan las variables en la igualdad y se completa cuadrados

y^2 6x − 4y + 1 = 0−

y^2 4y = 6x − 1−

y^2 4y + 2^2 = 6x − 1 + 4−

(y^2 = 6x + 3 − 2)

(

y

−

2)

^{2} = 6 x + ^{1}

2

Como en la ecuación, la variable lineal es x, entonces la parábola abre hacia este eje, tiene vértice en

V

=

2

,

1

−

2 , el foco esta a^3 unidades del vértice, debido a que

4

a

= 6

⇒

a

=

3

2

entonces el foco es F = (1, 2) y la directriz es x = -2^2

4
3
y F = (1, 2)
2
1
x −2−1 1 2

3.3.6. Ejercicios parábola

1. Complete cada una de las oraciones.
a. Una parábola abre hacia el eje y cuando tiene la ecuación ________ b. Una parábola es el conjunto de todos los puntos que ________ de un punto fijo llamado ________ y ________ llamada ________.

2. Grafique cada una de las siguientes parábolas, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz y la longitud de lado recto.
a. $(x - 2)^2 = 2y$ c. $(x + 1)^2 = -y + 4$.
b.
(
y
+ 1)
$^2 = -2 (x - 3)$. d. $y^2 = 4 x^1$
-2.

3. Encuentre la ecuación de la parábola para cada ítem, bajo la condición dada.
a. La coordenada del foco es F = (2,−1), cuya directriz y = 4 b. La longitud del lado recto es^8 , y la coordenada del foco es F = ^{2}, 0^3
2,−1) y el lado recto es el segmento limitado por los puntos P
^{3} c. La coordenada del foco es F = (−2, 2) y P2 = (−2, 4)1 = (−
4. Dada la ecuación canónica de la parábola cambiela a la forma general
a. $(y - 4)^2 = 2 (x - 1)$ c. $y^2 = x - 1$ b.
(
x
−
2)

$^2 = 6 (y - 3)$ d. $x + ^{2\,3}{}_3 = 6 y - 2$

5. Dada la ecuación general de la parábola cambiela a la forma canónica

a. $x^2 - 8x + 10y = -21$ c. $x^2 - 12x - 4y = -16$ b. $y^2 + 16x - 8y = 48$ d. $y^2 16x - 4y = -100$

6. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la párabola, en el punto dado.

a. $y^2 + 4x - 6y = -13$ y $P = (1, -1)$ b. $x^2 - 8x + 12y = -76$ y $P = (2, 0)$

3.3.7. Aplicaciones de la parábola

Galileo, tras varios experimentos lanzando un proyectil,[9] fue el primero que dio una descripción a la trayectoria que éste seguía, demostró que dicha trayectoria formaba una parábola.

Ejemplo

Un objeto es lanzado de un cañon, el cual sigue la trayectoria x^2 50x + y − 400 = 0. Determine:

1. ¿En qué coordenada está ubicado el cañón? y ¿En qué punto cae el objeto?
2. La distancia horizontal recorrida por el objeto desde que salió del cañón hasta que toca el piso.
3. La altura máxima que alcanza el objeto lanzado.

Solución

1. Para determinar las coordenadas del cañón y dónde cae el objeto, se debe igualar la ecuación con la recta y = 0 osea el eje x:

$-y = 0 \; x^2\; 50x + y - 400 = 0$,

x

−

^{2} 50x − 400 = 0−

[9]Un proyectil es cualquier cuerpo que se lanza por medio de alguna fuerza y continúa en movimiento por inercia propia.

Despejando la variable x, haciendo uso de la fórmula general se obtiene que: $x_1 = -7,015$ y $x_2 = 57,015$.

2. La distancia horizontal se encuentra con los valores x_1 y x_2 entonces: $|-7,015 - 57,015| = |-64,03| = 64,03$, por lo tanto el objeto tuvo un desplazamiento horizontal de aproximadamente 64.03 mts.

3. Para encontrar la altura máxima que alcanza el objeto lanzado, se debe encontrar la coordenada k en el vértice:

x^2 50x = −y + 400 despejando

$x^2 - 50x + 25^2 = -y + 400 + 625$

$(x - 25)^2 = -y + 1025$ −

Entonces el vértice de la parábola es V = (25,−1025), por lo tanto la altura máxima que alcanza el objeto es 1025 mts. de altura

La parábola tiene gran aplicación en la construcción de puentes, debido a que el cable de suspensión de un puente, uniformemente cargado, puede tomar la forma de una parábola o catenaria[10].

Los cables que constituyen el arco invertido (parábola) de los puentes colgantes, deben estar anclados a la torre en cada extremo del puente ya que son los encargados de transmitir en gran parte la carga que tiene que soportar la estructura.

Claro Torre Tensor

calle o calzada

Pilar

La longitud en la base de una parábola (longitud de lado recto) se llama claro o luz; la altura máxima sobre la base (del vértice al foco) se llama altura del arco si la parábola abre hacia arriba o se llama depresión si abre hacia abajo; el tirante es la cuerda vertical

paralela a la torre, el tablero que sostiene la calzada (calle del puente) suele estar suspendido mediante estos tirantes que conectan con el cable parabólico, las fuerzas principales en un puente colgante son de tracción en los cables principales y de compresión en los pilares.

Ejemplo

El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 [10]curva que describe un cable suspendido por sus extremos. mts. y están separados a una distancia de 500 mts. quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 mts. sobre la calzada del puente.

1. Encontrar la ecuación de la parábola que describe el cable del puente.

2. Calcular la longitud del tensor (altura) de un punto situado a 80 mts. del centro del puente.

Solución

1. La ecuación del cable en forma de parábola es $x^2 = 4a(y - k)$ ya que abre hacia el eje y, del enunciado se sabe que el vértice esta en la coordenada V = (0, 10).

La altura de la torre es de 60 mts. y la longitud de la calzada es 500 mts. entonces los extremos donde se fija el cable parabolico es (−250, 60), se debe reemplazar uno de los extremos y el valor del vértice en la ecuación de la parábola, entonces:

$2502 = 4a(60 - 10)$

$62500 = 4a(50)$ $62500 = 200a$

$62500 = a200$

$625 = a$

Luego se ha encontrado la coordenada del foco, como es una parábola que no está en el origen el foco es f : (h, a+k), entonces f : (0, 625/2+10) generando f : (0, 645/2).

Como la longitud del lado recto es $|4a|$ entonces

LLR = 4(645/2) = 1250

2. Teniendo estos valores, la ecuación de la parábola que satisface el cable del puente es: $x^2 = 1250y - 12500$; ahora para determinar la longitud del tensor, cuando x está a 80 mts. del centro del puente, se reemplaza dicho valor en la ecuación del puente:

$80^2 = 1250y - 12500$ $6400 + 12500 = 1250y$

$18900 = y\,1250$

$15,12 = y$

Por lo tanto, la altura del tensor es: 15.12 mts.

Otra aplicación que tiene la parábola es en las comunicaciones, pues al hacer girar una parábola en su propio eje genera un sólido de revolución llamado “paraboloide” de allí reciben el nombre de antena parabólica, debido a la propiedad que cualquier haz de rayos paralelos eje focal, se reflejan todos los rayos en el foco, por ello, el receptor debe estar ubicado en el foco.

Ejemplo

Una antena parabólica cuyo plato puede describirse al girar la parábola $y^2 - 5x - 30y = -225$ sobre su vértice, cuyo receptor de señal está ubicado en el foco. Determine:

a. ¿A qué altura está ubicada la antena en la torre?. b. ¿Dónde debe colocarse el receptor para dicha antena?.

Solución

a. Para encontrar la posición de la antena se debe hallar la coordenada del vértice, entonces:

$y^2 - 30y = 5x - 225$ completando cuadrados $y^2 - 30y + 15^2 = 5x - 225 + 225$

$(y - 15)^2 = 5x$

Por lo tanto, el vértice es (0, 15), osea que la antena esta a 15 metros de altura.

b. El foco se encuentra con $4a = 5$ entonces $a = \frac{5}{4}$, por lo tanto el receptor se debe ubicar en $\left(\frac{5}{4}, 15\right)$, es decir a 1 metro y 25 centímetros del vértice.

Entre otras aplicaciones están las linternas, farolas de los carros o las motos, donde el filamento del bombillo se ubica en el foco y gracias a la propiedad: "todo rayo de luz lanzado desde el foco va dirigido hacia un punto en la parábola, de ahí rebota y sale paralelo al eje focal", es decir todo haz de luz, que emane del foco, se refleja en la parábola a lo largo de una trayectoria paralela al eje de la parábola, sin importar cuál sea el punto de reflexión.

3.3.8. Ejercicios Aplicación de la parábola

1. Un proyector tiene un reflector parabólico en forma de tazón, que mide 12 cm de ancho de borde a borde y 8 cm de profundidad, si el filamento del bombillo se localiza en el foco ¿Qué tan lejos esta el filamento del vértice del reflector?, determine la ecuación que describe el proyector.
2. Un puente en forma de parábola invertida tiene su calle sobre el lado recto, la altura del puente es de 20 metros, si la longitud de la calle es 120 metros, determine la ecuación de la parábola que describe el puente y los puntos donde se debe anclar el puente.
3. Si las torres de un puente colgante tienen una separación de 400 metros y los cables atados a ella están a 200 mts arriba del piso del puente, ¿Qué longitud debe tener el tensor que está a 50 metros, suponga que el cable toca el piso en el punto medio V del puente.
4. En un concierto, la concha acustica esta deforma parabolica que sigue la ecuación y^2 $4x - 4y + 8 = 0$, en que posición debe colocarse el mi-

crofono del artista para aprobechar al máximo la acustica?

3.4. La elipse

"A primera vista el circulo presenta, sin duda, cierta sencillez atractiva. Pero una mirada a una elipse habria convencido al más mistico de los astrónomos de que y la perfecta simplicidad del circulo tiene mucho de la sonrisa vacía de x la idiotez."
Eric Temple Bell

La elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya suma de distancias entre dos (2) puntos fijos, llamados focos, a un punto P es constante.

3.4.1. Ecuación canónica con centro en el origen

Sean F (c, 0) y F (−c, 0) dos puntos fijos de un plano sobre el eje x y sea P = (x, y) un punto cualquiera. Se define la elipse si la suma de las distancias de los focos a un punto P es constante e igual a 2a, es decir: F P + F P = 2a entonces:

$(x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 = 2a$ por distancia entre dos puntos

$(x - c)^2 + y^2 = 2a - (x + c)^2 + y^2$

(
x
−
c
)
2
+
y
2

$^{2\,2} + y^{2\,2}$

$= 2a - (x + c)$ eliminado la raíz

(
x
−
c
)

2
$+$
y
2
$=$
2
a
$-$
$($
x
$+$
c
$)$
2
$+ y$
$2\ 2$
resolviendo el binomio
x
$^2\ 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2\ 4a\ (x + c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 - -$
x
$^2\ 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2\ 4a\ (x + c)^2 + y^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - -$
x
$^2\ 2xc + c^2 + y^2\ x^2\ 2cx - c^2\ y^2 = 4a^2\ 4a\ (x + c)^2 + y^2 - - - - -$
4
xc
$= 4$
a
$^2\ 4a\ (x + c)^2 + y^2$
$- -$
xc
$-$
a
$^2 = -a\ (x + c)^2 + y^2$
$-$
$xc + a^2 = a\ (x + c)^2 + y^2$ multiplicando por (-1)
2
$xc + a^{2\ 2} = a\ (x + c)^2 + y^2$ para eliminar la raiz

$(xc)^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2 (x + c)^2 + y^2$

$(xc)^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2 x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$x^2c^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$x^2c^2 + 2a^2cx - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

x2c2 $+ a^2 = x^2 + c^2 + y^2$ a2

x2c2+a2c2 $= x^2 + y^2$ a^2 a2 –

x2c2 $+ c^2 = x^2 + y^2$ a^2 a2 – x2c2 + a2c2 $= x^2 + y^2$ a^2

a^2 a^2 –

(x2+a2)c2 2 $+ y^2$ a^2 a2 = x –

x2 + a2 $c^2 = x^2 + y^2$ a^2

a^2 a^2 –

x2 $+ 1$ $c^2 = x^2 + y^2$ a^2 a2 –

y B(0, b) P (x, y)

V (–a, 0) V (a, 0) F (–c, 0) F (c, 0) x

B (0, –b)

por el triángulo formado con los ejes y aplicando el teorema de Pitágoras

a

$^2 = b^2 + c^2$ entonces $c^2 = a^2$ b^2

–

x2 $+ 1$ a^2 $b^2 = x^2 + y^2$ a^2

a2 – –

a2x2 $+ a^2$ x2b2 $b^2 = x^2 + y^2$ a^2

a2 –a2 – –

x

$^2 + a^2$ x2b2 b^2 a^2 $x^2 = y^2$

–a2 – – –

x2b2 $b^2 = y^2$

–a2 –

b2x2 $+ y^2 = b^2$ a2

$b^2x^2 + y^2$ b^2 a2b2 b2 = b2

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Observe que el lugar geométrico se intercepta con el eje x en dos puntos V y V , al igual que con el eje y en los puntos B y B , los cuales llamaremos vértices.

El segmento que une los puntos V y V , es mayor que el segmento que une los puntos B y B , por tal motivo, al segmento V V lo llamaremos semieje mayor y al segmento BB lo llamaremos semieje menor.

Las coordenadas de los vértices son:

– V = (a, 0), V = (−a, 0), por lo tanto la longitud del semieje mayor que es 2a

– B = (0, b) y B = (0,−b), y la del semieje menor es 2b.

El semieje mayor de la elipse reposa sobre la variable que tenga el denominador mayor

La intersección de los semiejes se “llama centro de la elipse” denotado por O.

Las cuerdas que pasan por el foco y son perpendiculares al semieje mayor se llaman lado recto, la longitud del lado recto está dada por:

L

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Si los focos fueran los puntos F (0, c) y F (0,−c) , el semieje mayor resposaría sobre el eje y.

Por lo tanto, la ecuación de una elipse con centro en el origen es de la forma:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

y y

x x

En donde las coordenadas de En donde las coordenadas de los extremos del lado recto son: los extremos del lado recto son:

2

y

c,

−

a

E

LR

=

b

2_b2

E_{LR} = c, $^{b\,b2}$, c y $_{-a}$, $c_{a\,a}$

$E^{b2\,b2\,b2}$ y $_{-}$c,$_{-\,a}$ E_{LR} =^{b2} ,$_{-}$c y $_{-\,a}$,$_{-}c_{LR}$ =$_{-}$c,$_{a\,a}$

Un elemento importante en la elipse es su excentricidad, la cual se define como el cociente entre la distancia de un foco al centro y la longitud del semieje mayor, la cual está dado por:

e

=

c a

Este valor está entre cero (0) y uno (1), es decir: 0 e < 1; lo que indica que tan achatada o redonda está la elipse, observando la gráfica siguiente se ve que si la excentricidad se acerca a 0, genera una circunferencia, mientras que si se aproxima a 1 genera una elipse achatada:

^{y} $e \approx 0{,}97$ $e \approx 0{,}91$ $_{e \approx 0{,}8}$

$e \approx 0{,}6$ $e \approx 0{,}2$ $e = 0$

x

Ejemplo

Dada la elipse cuya ecuación está dada por $18x^2 + 98y^2 - 882 = 0$. Hallar la longitud del semieje mayor y semieje menor, ¿Sobre quá eje reposa de la elipse, la longitud del lado recto y las coordenadas de los focos? Grafique.

Solución

$18x^2 + 98y^2 = 882$ Dividiendo ente 441

$^{18x^2\ 98y^2}$ = ^{882} simplificando se obtiene: $_{882}$ +$_{882\ 882}$

x

²

+

y

²

= 1:$_{49\ 9}$

Donde $a^2 = 49 \Rightarrow a = \pm\sqrt{49} \Rightarrow a = \pm 7$ y $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm\sqrt{9} \Rightarrow b = \pm 3$.

– El semieje mayor reposa en el eje x y el semieje menor en el eje y.

– los vértices son V = (7, 0), V = (–7, 0) y B = (0, 3) y B = (0, –3).

– La longitud del semieje mayor es 2a = 2 (7) = 14, la longitud del semieje menor es 2b = 2 (3) = 6.

– La longitud del lado recto ^{2b2} = $^{2(9)}$ L_{LR} = ^{18} ≈ 2,57.$_{a\ 7\ \Rightarrow\ 7}$

– El valor de c = $\pm\sqrt{a^2\ b^2}$ entonces c = $\pm\sqrt{49 - 9} \Rightarrow$ c = $\pm\sqrt{40} \approx 6{,}32$.

– Como la elipse está en el origen, las coordenadas de los focos son: F = (6,3, 0) y F = (–6,3, 0)

– La excentricidad está dada por e = ^{c}, entonces: e = $^{\sqrt{40}}$ ≈ 0,9 lo$_{a}$

7que indica que la elipse es más achatada.

y B3
2
1
V F F V 8
–
7
–
6
–
5
–
4
–
3
–
2
–
1
1
1
2
3
4
5
6 7 x –
– –2
3
B –
–4

3.4.2. Ejercicios elipse con centro en el origen

1. Determine la ecuación de la parábola que muestra cada una de las siguientes figura

yy

B

F

B BF Fxx

F B

2. Grafique cada una de las siguientes elipses, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz, al igual que la longitud de lado recto.

a. $x2$ $y2$ = 1 c. $x2$ $y2$ = 1_9 $+_{5\,3}$ $+_8$ b.$y2\,2$ = 1 d. $x2$ + $y2$ = 1_3 + $x_{16\,12}$

3.. Encuentre la ecuación de la parábola para cada ítem bajo la condición dada.

a. Encontrar la ecuación dl la elipse con centro en el origen y foco el punto F = (0, 3), eje mayor 10.

b. Hallar la ecuación de la elpise de centro en el origen, eje mayor sobre el eje x y pasa por los puntos $P_1 = (-5, 4)$y $P_1 = ^{13}, ^{3}\ ._{2\,2}$

4. Encuentre los puntos de intersección de las elipses

a. $y2$ $x2$ = 1 y $x2$ $y2$ = 1_4 $+_{1\,9}$ $+_4$ b. $y2$ + $x2$ = 1 y $x2$ + $y2$ = $1_{16\,9\,16\,9}$

3.4.3. Ecuación canónica con centro fuera del origen

Si el centro de la elipse se desplaza h unidades en el eje x y k unidades en el eje y.

La ecuación de la elipse está dada por:

$(x - h)^2 + (y - k)^2$

2

b

2

= 1

a

$(y - k)^2 + (x - h)^2$

2

b

2

= 1

a
y y F
k F C(h, k)F k C(h, k)
h x F
h x
Observe que si el semieje mayor está paralelo al eje x:
Observe que si el semieje mayor esta paralelo al eje y:
Los focos son: Los focos son:
F = (h + c, k) y F = (h − c, k) F = (h, k + c) y F = (h, k − c)
Los vértices: Los vértices:
V = (h + a, k) y V = (h − a, k) B = (h, k + b) y B = (h, k − b) V = (h, k + a) y V = (h, k − a) B = (h + b, k) y B = (h − b, k)

Ejemplo

Grafique cada una de las hipérbolas y encuentre sus elementos

a. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ 4 2 2
(
x
−
3)
2
b. $^{(y-5)}$ $+_{12} = 1_{16}$

Solución

a. Para la ecuación $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$, se tiene que:

h = 1 y k = −2, por lo tanto, el centro esta dado por C = (1,−2) $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ y $b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$, luego $c^2 = 4-2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$, entonces:

Las coordenadas de los vértices son:
V = (1 + 2,−2) ⇒ V = (3,−2) V = (1 − 2,−2) ⇒ V = (−1,−2) B = (1,−2 + √2) ⇒ B = (1, 0,59) B = 1,−2 − √2 ⇒ B = (1,−3,41)

Las coordenadas de los focos son:
F = (1 + √2,−2) ⇒ F = (2,41,− 2) F = 1 − √2,−2 ⇒ F = (−0,41,−2)
B 2
d
V F 1 C F V −2
B

−4

b. Para la ecuación $\frac{(y-5)^2}{16} + \frac{(x-3)^2}{6} = 1$, se tiene que:

h = 3 y k = 5, por lo tanto, el centro esta dado por C = (3, 5) $a^2 = 16$ $\Rightarrow a = \pm 4$ y $b^2 = 6 \Rightarrow b = \pm\sqrt{6}$,

luego $c^2 = 16 - 6 \Rightarrow c = \pm\sqrt{10}$, entonces:

Las coordenadas de los vértices son:

V = (3, 5 + 4) ⇒ V = (3, 9) V = (3, 5 − 4) ⇒ V = (3, 1) B = (3 + √6, 5) ⇒ B = (5,45, 5) B = 3 − √6, 5⇒ B = (0,5, 5)

Las coordenadas de los focos son:

F = (3, 5 + √10) ⇒ F = (3, 8,16) F = 3, 5 − √10⇒ F = (3, 1,84)

V F 8

6 B C B 4 d

2

F V 2 4

3.4.4. Ecuación general de la elipse

Analíticamente una elipse es una ecuación de segundo grado con dos (2) variable de la forma:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde A y C deben tener el mismo signo.

Ejemplo

Dadas las ecuación general de la parábola, encuentre su ecuación canónica y gráfique

a. $3x^2 + y^2 - 3 = 0$

b. $x^2 + 8y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$

Solución

a. Para transformar la ecuación a la forma canónica se debe despejar el término independiente a un lado de la igualdad

$3x^2 + y^2 - 3 = 0$ 3

x

2

+

y

2

−

= 3

$3x^2 + y^2 = 3$

3 3 3

$x2\ y2 = 1_1 +_3$

$y2 + x2 = 1_{3\ 1}$

entonces la hipérbola tiene su eje transv ersal paralelo al eje y, por ser esta v ariable la de may or denominador, el centro esta en el origen por no tener h y k, entonces C = (0, 0), como $a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1{,}73$ y $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$.

y ^{2} V

1

B B

2 – 1 1 –

– 1

V

– 2

b. Para transf ormar la ecuación a la f orma canónica se deben completar cuadrados en ambas v ariables, dejando el término independiente a un lado de la igualdad

$x^2 + 8y^2\ 2x + 8y + 1 = 0_-$

$x^2\ 2x + 8y^2 + 8y = _-1_-$

$x^2\ 2x + 8\ y^2 + y = _-1_-$

$x^2\ 2x + 1^2 + 8\ y^2 + y +^{1\ 2} = _-1 + 1 + 2_{-\ 2}$

$(x - 1)^2 + 8\ y +^{1\ 2} = 2_2$

(

x

–

1)

2

+

8

(

y

+

$^1)^2$

$^2 = ^2$

$_2\ 2\ 2$

(

x

−

1)

2

+

4

(

y

+

$^1)^2$

$^2 = 1_{2\,1}$

(

x

−

1)

2

+ (

y

+

$^1)^2$

$^2 = 1_{2\,1}$

4

entonces la hipérbola tiene su eje transversal paralelo al eje x, por ser esta variable, la de mayor denominador, el centro esta en C = 1, $_{-2}$, como $a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1{,}41$ y $b^2 = {}^1$ b =

1 1

$\pm^{2.4} \Rightarrow$

y

B_x

_1 ∨ 1 2 ∨ 3

B

_1

_2

3.4.5. Ejercicios elipse

1. Grafique cada una de las siguientes elipses, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz y la longitud de lado recto:

(x−5)2 + (y+4)2 = 1 c. 4x2+ 8y2 4x−24y−13 = 0a. 25 9 d. $16x^2 + 25^{-2} + 160x +$ 200y + b.

(

x

+1)

2

+

(

y

−

3)

2

y

= 1 400 = 0 . 169 144

2. Encuentre la ecuación de la elipse para cada ítem bajo la condición dada.

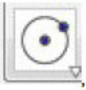
a. Centro en (3,2), un foco en (3,7) y un vértice en (3,-5). b. Focos en (5,0) y (-5,0) longitud del eje menor 8.

c. Focos en (0,-8) y (0,8) longitud del eje mayor 34.

d. Centro en (2,-2), un vértice en (-2,6), un foco en (–2, 2 + √12).

Actividad con Software[7]

1. Con la herramienta circunferencia



, genere 2 circunferencias cocéntricas L_1 y L_2.

2. Con la herramienta punto nuevo

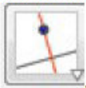
, cree un punto C_1sobre la circunferencia mayor L1

3. Con la herramienta segmento

, haga un segmento S_1 entre el centro de la circunferencia y el contorno de la circunferencia mayor L1, es decir el radio de L_1, observe que este radio corta a L_2. 4. Con el botón intersección entre objetos

, genere un punto C_2 entre S_1 y L_2, es decir el radio de L_2.

5. Con la herramienta recta perpendicular



, trace las perpendiculares (4) a los ejes coordenados que pasen por C_1 y C_2.

6. Con el botón intersección entre objetos

, genere dos puntos I_1 y I_2 entre las perpendiculares; de tal manera que se muestre de la siguiente manera.

y

6

c I_2 C_1 5 B

4 C C_2 A

I1

3

2

1

x

1 2 3 4 5 6

7. Con la herramienta activa trazo

, active el trazo a C_1 y con la herramienta selección mueva el punto C_1. ¿Qué lugar geométrico genera?, ¿Cuál sería secuación?.

8. Con la herramienta activa trazo

, desactive el trazo a C_1 y Activelo a C_2, con la herramienta selección mueva el punto C_1. ¿Qué lugar geométrico genera?, ¿Cuál sería secuación?.

3.4.6. Aplicaciones de la elipse

Ejemplo

Al igual que la parábola, la elipse tiene aplicaciones en nuestro entorno como es el caso de los auditorios elipiticos, las bicicletas elipticas, mesas de 6 puestos entre otros; en construcción uno de los más influyentes es el coliseo romano y la capilla eliptica en Madrid.

En un terreno rectangular de 100x50 mtrs, se desea construir un auditorio de forma eliptica. Para optimizar el máximo el material para la construcción, un estudio determinó que la excentricidad de la elipse debe ser 0.8, Determine la ecuación que describe el auditorio eliptico

Solución

Se sabe que $2b = 50 \Rightarrow b = 25$ y que la excentricidad es $e = ^{c} ==_{a}$ 0,8, pero $c = \sqrt{a^2\ b^2}$ entonces $e = ^{\sqrt{a2\ b2}} = 0,8 \Rightarrow \sqrt{a^2\ b^2} = 0,8a$ luego $a^2\ b^2 = 0,64a^{2\ a- -}\ 0,64a^2 = 25^2$

$^{-}2$

$_{-}$, como se tiene el valor de b entonces a_{-} 0

,

36

a

^{2} = 625 $\Rightarrow$ a^{2}

$\Rightarrow$

el auditorio eliptico es

= 1736, por lo tanto la ecuación que satisface

x2 y2 = 1. 1736 – 625

La da en cuya caracteristica es la comunicación de dos puntos, o estaciones de metro subterráneo, de tal manera que a cada lado de la vía del tren quede un área segura para los transeúntes.

Ejemplo

elipse también es utilizala construcción de túneles

Un túnel para el paso del tren tiene forma de semielipse, la altura del tunel debe ser de 4 metros en la parte central y de 8 metros en la base. Si una persona entra al túnel, ¿A qué distancia de la pared puede caminar de forma segura? ¿Que ecuación describe el túnel

Solución

b = 3 y 2a = 8 por lo tanto a = 4 entonces la ecuación que describe el túnel es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Para determinar a qué distancia puede caminar de forma segura, se debe hallar distancia del foco al vértice, como c = $\sqrt{a^2 - b^2}$ $\Rightarrow$ c = $\sqrt{7} \approx 2,65$, entonces: a – c = 4 – 2,65 = 1,35; por lo tanto puede andar de forma segura hasta 1 metro con 55 centímetros a cada lado del túnel.

Otra aplicación importante es la establecida por kepler que establece las leyes del movimiento planetario, donde la orbita de cada planeta sigue una trayectoria eliptica con excentricidad diferente, siendo el sol uno de los focos de cada orbita, por tanto, para evitar la utilización de distancias tan grandes se adopta como unidad de medida la Unidad Astronómica (UA), es decir, la distancia media entre la Tierra y el Sol, 149,600,000 km. donde la velocidad de la luz debe cubrir esta

distancia en 8 minutos y 19 segundos.
La siguiente tabla muestra los datos de cada planeta del sistema solar
Planeta
Mercurio Venus Tierra Marte Júpiter Saturno
Urano
Neptuno Plutón
Distancia minima al sol (UA) 0.387
0.723
1.000
1.524
5.203
9.539
19.182
30.058
39.439
Excentricidad Periodo (años)
0.206 0.24
0.007 0.62
0.017 1.00
0.093 1.88
0.048 11.86
0.056 29.46
0.047 84.01
0.009 164.6
0.250 247.7

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la orbita que sigue el planeta Mercurio.

Solución

Como la distancia mínima es 0,387, es decir $a - c = 0,387$ y la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = 0,206$ entonces:

$c = a - 0 - 387$ $e = \frac{a - 0,387}{a} = 0,206$

$a - 0,387 = 0,206a$

$a - 0,206a = 0,387$

$0,794a = 0,387$

$a = 0,487 \Rightarrow a^2 = 0,237$ luego

$c = 0,206a \Rightarrow c = (0,206)(0,487) \Rightarrow c = 1,003 \Rightarrow c^2 = 0,01$

como $b^2 = a^2\ c^2$ $b^2 = 0,237 - 0,01 \Rightarrow b^2 = 0,137 - \Rightarrow$

entonces la ecuación de la orbita de Mercurio es $x^2 + y^2$

$0,137 = {}^{1}0,237$

Para ver el comportamiento de los planetas ingrese a http://www.solarsystemscope.com/

3.4.7. Ejercicios Aplicación de la elipse

1. Encuentre la ecuación de la orbita que siguen los planetas
    a. Jupiter

b. Urano

c. Plutón

3.5. La hipérbola

"Un sutil pensamiento erróneo puede dar lugar a una indagación$_y$ fructífera que revela verdades de gran valor".$_x$

Isaac Asimov.

La Hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano, cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos, llamados "focos" a un punto P es constante.

$(x - c)^2 + y^2 (x + c)^2 + y^2 = 2a$ Por distancia entre dos puntos$^-$

(

x

−

c

)

2

+

y

2

$^{2\,2} + y^{2\,2} = 2a + (x + c)$

$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x + c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2$

x

$^2\ 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\ (x + c)^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 -$

$-2xc = 4a^2 + 4a\ (x + c)^2 + y^2 + 2cx$

$-4xc - 4a^2 = a\ (x + c)^2 + y^2$

$-xc - a^{2\,2} = a\ (x + c)^2 + y^{2\,2}$

$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2 (x + c)^2 + y^2$

$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2 x^2 + 2xc + c^2 + y^2$

$x2c2 + 2xc + a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2$

a^2

$x2c2 + a^2 = x^2 + c^2 + y^2{}_{a2}$

$x2c2\ x^2 = c^2\ a^2 + y^2\ a2 - -$

$x2c2\ x2a2 = c^2\ a^2 + y^2\ a- \ -$

$x2(c2\ a2) = c^2\ a^2 + y^2{}_{a2} - -$

$x^2 = c^2\ a^2 + y^2$

a

2

(

−

$c^2\ a^2)-$

$2 =_{(c2-} {}^{a2x2\ y\ c2}$

$a^2 - (c^2\ a^2)-a^2)-$

$x2\ y2 = 1a2 - (c2\ a2)-$

$x2\ y2 = 1_{a2 - b2}$

Por el triángulo formado con los ejes y aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

a

$^2 = b^2 + c^2$, entonces $c^2\ a^2 = b^2$

−

y

B(0, b) P (x, y)

V (−a, 0) V (a, 0) x F (−c, 0) F (c, 0)

B (0, −b) 2a

Entonces, la ecuación de la hipérbola está dada por:

$x^2\ y^2$

$a^2 - b^2 = 1$

Observe que el lugar geométrico se intercepta con el eje x en dos puntos V y V , los cuales llamaremos vértices.

El segmento que une los puntos V y V , lo llamaremos eje transversal y al segmento BB lo llamaremos eje conjugado. Las coordenadas de los vértices son: $V = (a, 0)$, $V = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ y $B = (0, -b)$, la longitud del eje transversal es 2a y la del eje conjugado es 2b.

A diferencia de las otras cónicas, la hipérbola tiene asociadas 2 rectas que son diagonales extendidas, que pasan por el centro de la hipérbola y por los vértices del rectángulo generado por los lados que pasan por los vértices y es perpendicular al eje transversal y el otro par de lados pasa por los extremos del lado conjugado. Estas dos (2) rectas son asíntotas de la hipérbola y muestran qué tan abierta o cerrada va la curva de la hipérbola, como la asíntota pasa por el centro $O = (0, 0)$ y el punto $P = (a, b)$, las ecuaciones de las hipérbolas son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad y \quad y = -\frac{b}{a}x$$

El eje transversal de la hipérbola reposa sobre la variable que esté positiva.

La intersección de los ejes se llama centro de la hipérbola denotado por O.

Las cuerdas que pasan por el foco y son perpendiculares al eje transversal se llaman lado recto, la longitud del lado recto está dada por

$$L_{LR} = \frac{2b^2}{a},$$

Si los focos fueran los puntos $F(0, c)$ y $F(0, -c)$, el eje transversal resposaria sobre el eje y.

Por lo tanto la ecuación de una hipérbola con centro en el origen es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y y F B V

F V_i V F_B B i x_x
V B F
En donde las coordenadas de En donde las coordenadas de los extremos del lado recto son: los extremos del lado recto son:
2
y
c,
–
a
E
LR
=
b
2
E
a a
^{b2} , c_{LR} = c, $^{b\,b2}$, c $y_{-\,a}$
$E^{b2\,b2}$ y –c,– a E_{LR} =$^{b2\,b2}$,–c_{LR} =–c,a a ,–c $y_{-\,a}$
En general, la ecuación de la hipérbola de centro en el origen y cuyos focos están sobre los ejes coordenados es: Ax^2 By^2 = ±1–
Ejemplo
Encuentre la ecuación canónica de la hiperbola y grafíque a. $3x^2$ $2y^2$ = 1
b. $3x^{2-}$ $2y^2$ = –1–
Solución
a. Pasando a la ecuación canónica se tiene
3 x^2 $2y^2$
1
x^2 1 1
1
= 11 −y2 = 1, entonces a = ± 3 y b = ± 23 − 1
2
2
1

–2–1 1

–1

–2

b. Pasando a la ecuación canónica se tiene $-3x^2 + 2y^2 = 1$

$2y^2\ 3x^2 = 1$

$2\,y^2 - 3x^2$

1

y^2 1 1

1

$= 11 - x2 = 1$, entonces $a = \pm 2$ y $b = \pm 32 - 1$

3

2

1

–2–1 1

–1 –2

3.5.1. Ejercicios hipérbola con centro en el origen

1. Encuentre la ecuación de la hiperbola que satisface las condiciones dadas.

a. Centro en C = (0, 0), Foco en F = (3, 0) vértice B = (0, 2) b. Asíntota $3x - y = 0$, eje conjugado sobre el eje x

2 B

1

–3–2–1 1 2

–1

–2

c.–3

y

d.

2. Grafique cada una de las siguientes hipérbolas, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz y la longitud de lado recto.

a. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

c. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2. Encuentre la ecuación de la elipse para cada ítem, bajo la condición dada.

a. Centro en (0,0), un foco en (10,0) y extremo del lado recto (10,4.5) b. Vértice en (2,0), un foco en (6,0)

c. Vértice en (0,2), un foco en (0,3)

d. Focos en (5,0) y (-5,0) longitud del eje menor 8.

e. Focos en (0,-8) y (0,8) longitud del eje mayor 34

3. Hallar la ecuación de las asíntotas y la hipérbola que tiene los focos y vértices, los mismos vértices y focos de la elipse $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$, y luego encuentre las ecuaciones de sus asíntotas.

3.5.2. Ecuación canónica con centro fuera del origen

Si el centro de la hipérbola se desplaza h unidades en el eje x y k unidades en el eje y.

La ecuación de la hipérbola está dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

y y F

k F C(h, k) F k C(h, k)

F

h x h x

Si la ecuación de la hipérbola con centro en (h, k), tiene el eje transversal es paralelo al eje x.

Si la ecuación de la hipérbola con centro en (h, k), tiene el eje transversal es paralelo al eje y

Los focos son

$F = (h + c, k)$ y $F = (h - c, k)$

Los focos son

$F = (h, k + c)$ y $F = (h, k - c)$

Los vértices

$V = (h + a, k)$ y $V = (h - a, k)$

$B = (h, k + b)$ y $B = (h, k - b)$

Los vértices

$V = (h, k + a)$ y $V = (h, k - a)$

$B = (h + b, k)$ y $B = (h - b, k)$

Las asíntotas son:

$y_1 = \frac{b}{a}(x-h) + k \qquad y_2 = -\frac{b}{a}(x-h) + k$

Las asintotas son:

$y_1 = \frac{a}{b}(x-h) + k \qquad y_2 = -\frac{a}{b}(x-h) + k$

Ejemplo

Grafique cada una de las hipérbolas y encuentre sus elementos a.

$(x-2)^2$ $(y+3)^2$

12

b. $(y-5)$

= 116 2 − $(x+1)^2$ = 19 − 20

Solución

a. Para la ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{12} = 1$, se tiene que:

h = 2 y k = −3, por lo tanto, el centro esta dado por C = (2,−3)

$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ y $b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3}$, luego

$c^2 = 16 + 12 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{7}$, entonces:

Las coordenadas de los vértices son:

$V = (2 + 4,-3) \Rightarrow V = (6,-3)$

$V = (2 - 4,-3) \Rightarrow V = (-2,-3)$ $B = (2,-3 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow B = (2,\ 0{,}46)$ $B = 2,-3 -$ $2\sqrt{3} \Rightarrow B = (2,-6{,}46)$

Las coordenadas de los focos son:

$F = (2 + 2\sqrt{7},-3) \Rightarrow F = (7{,}29,-3)$ $F = 2 - 2\sqrt{7},-3 \Rightarrow F = (-3{,}29,-3)$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$y = \frac{2\sqrt{3}}{4}(x - 2) + (-3) \Rightarrow y = 0{,}87x - 4{,}73$ y

$y = -\frac{2\sqrt{3}}{4}(x - 2) - (-3) \Rightarrow y = -0{,}87x - 1{,}27$

−4 −2 2 4 6 8

F

V

− 2

C V F

−4

−6

b. Para la ecuación

$\frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{20} = 1$, se tiene que: h = −1 y k = 5, por lo tanto, el centro esta dado por C = (−1, 5)

$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$ y $b^2 = 20 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{5}$,

luego $c^2 = 9 + 20 \Rightarrow c = \pm\sqrt{29}$, entonces:
Las coordenadas de los vértices son:
$V = (-1, 5 + 3) \Rightarrow V = (-1, 8)$
$V = (-1, 5 - 3) \Rightarrow V = (-1, 2)$ $B = (-1 + 2\sqrt{5}, 5) \Rightarrow B = (3{,}47, 5)$ $B = -1 - 2\sqrt{5}, 5 \Rightarrow B = (-5{,}47, 5)$
Las coordenadas de los focos son:
$F = (-1, 5 + \sqrt{29}) \Rightarrow F = (-1, 10{,}39)$ $F = -1, 5 - \sqrt{29} \Rightarrow F = (-1, 0{,}39)$
Las ecuaciones de las asíntotas son:
y
=
3
$_{2\sqrt{5}}$ $(x - (-1)) + (5) \Rightarrow y = 0{,}67x + 5{,}67$ y y
=
3
$_{-2\sqrt{3}}$ $(x - (-1)) - (5) \Rightarrow y = -0{,}67x - 4{,}33$
F
10
V
8
6
C
4
V
2 F
−4 −2 2

3.5.3. Hipérbola equilátera

Se dice que una hipérbola es equilatera si las asíntotas son perpendiculares entre sí y tiene por ecuación
$xy = k$, donde: $k \in R$
Generalmente, las asíntotas son los ejes coordenados.
si $k > 0$, el lugar geométrico se encuentra en el primer y tercer cuadrante.y
si $k < 0$, el lugar geométrico se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.y
x x

3.5.4. Ecuación general de la hipérbola

Analíticamente una hipérbola es una ecuación de segundo grado con 2 variables de la forma:

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde A y B tienen signos diferentes

Ejemplo

Dadas las ecuación general de la hipérbola, encuentre su ecuación canónica y gráfique

a. $3x^2 y^2 3 = 0$

b. $x^{2-} y^{2-} 2x + 8y + 1 = 0_{-8-}$

Solución

a. Para transformar la ecuación a la forma canónica se debe despejar el término independiente a un lado de la igualdad

$3x^2 y^2 3 = 0$

3

x

2

–

y

2

–

= 3

3x

x^2

$2 ^- y2 = 3$

3 – 3 3

$y^2 = 1_{1-3}$

entonces la hipérbola tiene su eje transversal paralelo al eje x, por ser esta variable positiva, el centro esta en el origen por no tener h y k, entonces C = (0, 0), como $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ y $b^2 = 3 \Rightarrow b = \pm 1,73$, se tienen las ecuaciones de las asintotas $y = \sqrt{3}x$ y $y = -\sqrt{3}x$

x

2

1

F V C V F

2_1 1 2_

_1

_2

b. Para transf ormar la ecuación a la f orma canónica se deben completar cuadrados en ambas v ariables, dejando el término independiente a un lado de la igualdad

x^2 $8y^2$ 2x + 8y + 1 = 0_ _

x^2 2x _ $8y^2$ + 8y = _1_

x^2 2x _ 8 y^2 y = _1_ _

x^2 2x + 1^2 8 y^2 y + $^{1\,2}$ = _1 + 1 _ 2_ _ _ $_2$

(
x
_
1)
^{2} 8 y $^{1\,2}$
_2 = _2_

$(x\_1)^2$ $8(y_{-\ 2})^{21}$ 2 $-^2$ _ $-^2$ = −2_

^{2} $_+$ $4(y_{-2})^2(x\_1)^1$

1

= 1

_2

(
y
_
$^1{}_)^2$ (x2
$_1$ _ $-^{1)2}$ = 1
$_4$ 2

entonces la hipérbola tiene su eje transv ersal paralelo al eje y, por ser esta v ariable positiv a, el centro esta en C = 1, ^{1} , como a^2 =
1
a
=
$_1$ 2 4 ⇒

±

2 y $b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1{,}41$, se tienen las ecuaciones de las asintotas y

=

20

x

+

3 y y = −20x + 17

20 20

y F2

1 V

C

Vx

−

1 1 2 3

F

−1

−2

3.5.5. Ejercicios hipérbola

1. Grafique cada una de las siguientes elipses, encuentre la coordenada del foco y la ecuación de la directriz y la longitud de lado recto:

a. 9

b. (x−5)

$(x-5)^2$ $(y+4)^2$ = 125 2 − (y+4)2

25

c. (x−1)

(y−1) d.

= 19 2 − (y−3)2 = 1 169 2 − 144

(x−3)2 = 1 169 −2 144

e. $4x^2$ 8y − x − 4y − 26 = 0

f.

–

x

2

–

$+ 5 y^2 + 16_x + 20 y + 40 = 0$

g. $9x^2 4y^2 + 36x - 16y - 16 = 0$

h. $x^{2-} 2y^2 + 6x + 4 y + 5 = 0-$

2. Encuentre la ecuación de la elipse para cada ítem bajo la condición dada.

a. Centro en (3,2), un foco en (3,7) y un vértice en (3,-5). b. Centro en (0.5,2), un foco en (3,2) y longitud lado recto 2. c. vética en (-2,2), un foco en (-2,4).

d. Centro en (2,-2), un vértice en (-2,6), un foco en $(-2, 2 + \sqrt{12})$.

3. Hallar la ecuación de la hipérbola de las siguientes imagenes

y^y

a. b.

Actividad
con Software8

Dado un segmento AB, la base de un triángulo, haciendo uso de la herramienta Activa rastro

, dibuje el lugar geometrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es la mitad del otro.

3.5.6. Aplicaciones de la hipérbola

En navegación de aviones y barcos la hipérbola tiene gran aplicación, muestra de ello es el sistema LORAN (long

AB distance radio navigation), el cual envia pulsos sincronizaC dos a los barcos o avines a traves de estaciones de transmisión muy alejadas una de otros, la diferencia de los tiempos de llegada de estos pulso son constantes en una hipérbola.

Para encontrar un barco en alta mar, se hace una triangulación en a traves de tres estaciones de transmisión, de tal manera que al generar las hipérbola entre las estaciones se puede ubicar la posición del barco mediante la intersección de las hipérbolas.

Ejemplo

Dos estaciones de transmision a borde de playa alejadas una de otra a 200 kms. envian pulsos sincronizados a un barco encayo 200

kms de la playa mar adentro, encontrar la posición del barco si la diferencia del tiempo de los pulsos es de 1 segundos.
Solución

Como la distancia entre las estaciones es 200 kms, entoces, la coordenada de las estaciones serian $E_1 = (-100, 0)$ y $E_2 = (100, 0)$, y el lugar donde encayo el barco es $B = (x, 1)$ entonces

$(x - 1)^2 + 2^2 (x + 1)^2 + 2^2 = 1-$

$(x - 1)^2 + 2^2 = 1 + (x + 1)^2 + 2^2$

3.6. ACTIVIDAD GENERAL UNIDAD 3 131

2

$(x - 1)^2 + 4 = 1 + (x + 1)^2 + 4$

$x^2\ 2x + 5 = 1 + 2\ (x + 1)^2 + 4 + (x + 1)^2 + 4-$

$x^{2\,2} + 4 + x^2 + 2x + 5-\ 2x + 5 = 1 + 2\ (x + 1)$

$4x - 1 = 2\ (x + 1)^2 + 4-_{2}$

$(-4x - 1)^2 = 2\ (x + 1)^2 + 4$

$(^2 = 4\ x^2 + 2x + 5-4x - 1)$

$16x^2 + 8x - 1 = 4\ x^2 + 2x + 5$

$16x^2 + 8x - 1 = 4x^2 + 8x + 20$

$12x^2 = 19$

$x^2 = 1{,}58$

$x = 1{,}258$

Por lo tanto la coordenada del barco es $B = (1{,}258, 2)$

3.6. Actividad general unidad 3

En un mismo plano esboce los siguientes lugares geométricos, de tal manera que cada gráfica se dibuje entre la intersección de los lugares geométricos.

1. $x^2 + y^2 + 7x - y + {}^{249} = 0_{20}$
2. $x^2 + 5y^2\ 20 = 0-$
3. $y^2 + x + {}^{15} = 0_4$
4. $429x^2 - 1171y^2 = 1256$
5. $61x^2 - 278y^2 = -50$
6. $50y^2 - 57x + 254 = 0$
7. la recta $L_1 = -36x + 25y = 50$ forma con la recta L_2 un ángulo

de 30 grados, encuentre la ecuación de L_2 sabiendo que esta pasa por el punto
D
=
1
$-_2$, 2 .
8. Triángulo f ormado por los puntos
A
=
^{1} ,$-$2 ,B = 1^7 $-_2$ y
C = $(0,-2)^{-2}$
9. encuentre los puntos de intersección de las rectas:
– x + 2y = 5 y x – 2y = 9;
– x – 2y = 9 y 25x + 100y = 224;
– 3x – 2y – 20 = 0 y 25x + 100y = 224

3.7. Actividad general

En la ciudad X se encuentra un aeropuerto como se muestra en la f igura, la escala es de a 1:2

carrera 1

ca rre

Determine:

1. Un helicóptero está ubicado: en la punta en la coordenada (6,6) y la cola en (15,17), el centro de la hélice esta bajo una relación de 2/3 y la medida de la hélice es de 8 metros y medio, encuentre la ecuación de la circunf erencia que generan la hélices del helicóptero en mov imiento.

2. La torre de control está ubicada en la coordenada (-6,4), el alcance del radar de esta torre tiene un radio de alcance de 130 metros; encuentre la ecuación de la circunf erencia que satisf ace el alcance de dicho radar. Encuentre la ecuación de la elipse que f orma las alas de una av ioneta, 3.8. LABORATORIO 133

sabiendo que la env ergadura de las alas es 15 mts, los motores de la av ioneta están en el extremó del lado recto y miden 5 mts, el origen de la ala está en la coordenada (-12,10).

3.Un Av ion solicita a la torre de control permiso para aterrizar, la torre le dice al piloto que siga la tray ectoria$x2$ + $(y-35)2$ = 1, determine$_{3906\ 100}$

los posibles puntos de despeje aterrizaje (focos), la excentricidad de la trayectoria y la longitud de la pista

4. La carrera 2 a la altura de la calle 2 esta un ubicada una glorieta, la cual está iluminada por 3 tres postes de energía que están ubicados en las coordenadas $P_1 = (16, -2)$, $P_2 = (18, -4)$ y $P_3 = (15, -7)$ respectivamente, encuentre la ecuación de dicha glorieta.

5. La intersección de la carrera 2 y la calle 3 forman 2 hipérbolas cuyas ecuaciones de las asintotas son $y = x - 20$ (carrera2) y $4x + 4y - 80 = 0$ (Calle 3), determine la ecuación de ambas hipérbolas que determnan el cruce

3.8. Laboratorio

Materiales

Una linterna de farola o bombilla, de luz no dirigida LED Una regla Un metro

Práctica de laboratorio

1. Tome la linterna y mida el diámetro de la circun ferencia que toma el reflector parabólico (Tazón), luego mida la profundidad del reflector, con estas medidas, de la ecuación que describe el reflector al colocarlo en un plano, encuentre ¿A qué distancia esta el foco? Y mire si coincide con el filamento del bombillo de la linterna o ¿Qué tan desenfocado esta?.
2. Sostenga la linterna alumbrando sobre un plano (el suelo, la hoja) y determine ¿Cómo crece el radio de la luz a medida que se aleja la linterna del plano?, tome cinco o seis medidas diferentes y explique

¿Qué relación hay entre la distancia al plano y el diámetro de la luz proyectada.

Determine:

a) Tome la linterna, de tal manera que el área que alumbre sea una circunferencia, marque tres (3) puntos en el plano y determine la ecuación de esta circunferencia.

b) ¿Es posible girar la linterna de tal manera que el área que alumbra sea una parábola? Explique su respuesta, si esta opción es posible, marque un plano y tome un punto sobre él y determine la ecuación de la parábola resultante.

c) Gire la linterna, de tal manera que el área que alumbra sea una elipse, mire la longitud del eje mayor y del eje menor, determine la ecuación de la elipse y halle sus focos, su excentricidad y la

longitud de su lado recto.
e) ¿Como puede sostener la linterna para que la luz generada forme una hipérbola con el plano?

Para más información sobre este capítulo, se recomienda ver el video Cónicas, del baloncesto a los cometas de la serie “Mas por menos” el que se puede ver en Youtube

3.9. Cuestionario unidad 3

Las siguientes preguntas constan de un enunciado y 4 posibles respuestas, de las cuales una es verdadera:

1. En la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, el radio está dado por:
a)
r
=
√
F
b)
r
=
$\sqrt{}D^2{+}E^2\ 2F_4\ -$
c)
r
=
$\sqrt{}D^2{+}E^2\ 4F$$_{d)\ r\ =}$ $\sqrt{}D^2{+}E^2{+}4F\ 2^-\ 4$

2. Si el foco de una parábola está a la izquierda de la directriz, se puede decir que la ecuación de la parábola es:
a) $(y - k)^2 = 4ax$ b) $y^2 = -4ax$
c) $-x^2 = 4ay$ d) $x^2 = 4ay$

3. La ecuación de la hipérbola$^{(y-3)2\ (x+2)2}$ = 1, Tiene centro en:$^{4\ -\ 9}$
a) c = (3, −2) b) c = (2, −3) c) c = (−2, 3) d) c = (−3, 2)

4. La ecuación $3x^2 + 3y^2\ 4x + 2y + 6 = 0$ representa: −
a) Una circunferencia imaginaria b) Un punto
c) Una circunferencia real d) Una elipse con centro en (h,k) 3.9. CUESTIONARIO UNIDAD 3 135

5. La ecuación de la hipérbola$^{x2\ y2}$ = 1 tiene por ecuación analítica:^{16} $^{-\ 4}$

a) $4x^2$ $16y^2$ 1 = 0 b) $4x^2$ $16y^2$ 16 = 0 c)
x
2 – y2 ¯ 2 – y2 ¯ – 4 – 16 = 0 d) 4x– – 64 = 0
6. Dada la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B y C son igual a cero, representa:
a) Una circunferencia b) Una recta c) Una elipse d) Una hipérbola
7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la gráfica que aparece a continuación?
6^y F
5
4
3
2
1 F ^{1} x 1 2 3 4
a) $4x^2 + 9y^2$ 36x–24y + 36 = 0 b) $4x^2 + 9y^2$+ 36x + 24y –36 = 0 c)
$9x^2 + 4y^2$ – 36x–24y + 36 = 0 d) $9x^2 + 4y^2$+ 36x + 24y –36 = 0–
8. La ecuación general de la circunferencia con centro en C (–2, 3) y radio 4 es:
a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 21 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 16 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$
9. Si la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ muestra la siguiente gráfica: y
x
Se puede afirmar que:
a) La escala del eje y es un tercio de la escala del eje x. c) Los ejes x y y tienen la misma escala.
b) La escala del eje y es el doble que la escala del eje x.
d) La escala del eje x es el doble que la escala del eje y.
10. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación $9x^2$
18x – 33 = $4y^2$ + 24y + 30?–
yy 1_x 4 3 –
3
–
2
1
$-_1$ 1 2 3 4_2
–
–2 1_x –

3
4
–
6_5_4_3_2_1 1 _
1
5 –2_6 –3 a)‾7 y b)‾4 y– – 51 x4
3
–
2
–
1
1
2
3
4
3 –1
– 2
–2 1x–3
4 7_6_5_4_3_2_1–5 –1 –
–
6 –2 c)‾ d)_3

CAPÍTULO4

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS
“En ocasiones debemos tomar distancia y hacer giros en nuestro rumbo para obtener una mejor visión de la realidad.”
Jhaz.

En este capítulo se hará un estudio más profundo a las secciones cónicas (ecuaciones de segundo grado), al ser transformadas mediante la traslación y la rotación.
137

4.1. Traslación de ejes

La transformación es un desplazamiento horizontal y/o vertical que se hace a partir de los ejes del plano cartesiano, generando un nuevo sistema de cordenadas, en donde el eje de las abscisas al desplazarse se denota por x y el eje de las ordenadas por y .

Sean ox y oy los ejes del y y plano cartesiano, C(h, k) las coor P
(x, y) denadas del nuevo origen, el cual
P
(
x
, y
)
está dado por o y o x y o y los nuevos ejes paralelos a los ejes k
originales; supóngase que un punO x to P (x, y) en el plano cartesiano
coincide con un punto P (x , y) x en el nuevo sistema coordenado, O
h para determinar las coordenadas
de P (x, y) en términos de x y y en función de x y y se debe hacer uso de las ecuaciones de transformación por traslación de ejes que esta dada por:
x = x + h x = x-h
y y
y = y +k y = y-k
Si se debe trasladar la ecuación a un punto dado.
Si se debe encontrar el punto al cual se traslado la ecuación.
Ejemplo
a. Transforme la ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2+2x-6y+6 = 0$ trasladando los ejes al punto P = (−1, 3).
b. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, genere la ecuación después de trasladar el origen al punto P = (−2, 2).
c. Encuentre el punto al que debe trasladarse la ecuación de la $4x^2 + y^2 + 8x - 10y + 10 = 0$, para que esté en el origen.
Solución
a. Reemplazamos en la ecuación los valores de x e y por la
ecuación 4.1. TRASLACIÓN DE EJES 139
de traslación.
$(x + h)^2 + (y + k)^2 + 2(x + h) - 6(y + k) + 6 = 0$ $(x + (-1))^2 + (y + 3)^2 + 2(x + (-1)) - 6(y + 3) + 6 = 0$ $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 2(x - 1) - 6(y + 3) + 6 = 0$
x^2 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 2x − 2 − 6y − 18 + 6 = 0 x
2
−
+ y^2 4 = 0

x
2
+
y
2
−
= 4

Trasladando los ejes al punto P = (−1, 3) la ecuación queda transformada en la circunferencia con ecuación es $x^2 + y^2 = 4$ y el radio r = 2.

4
C k
2
−2 h

b. Reemplazamos en la ecuación, los valores del punto al que se traslada en la ecuación de traslación.

$(x + h)^2 + (y + k)^2 + 2(x + h) - 6(y + k) + 6 = 0$ $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + 2(x - 2) - 6(y + 2) + 6 = 0$ $x^2\ 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + 2x - 4 - 6y - 12 + 6 = 0$ $x^{2-}\ 2x + y^2\ 2y - 14 = 0$

$x^{2-}\ 2x + y^{2-}\ 2y = 14$

$x^{2-}\ 2x + 1^{2-2}\ 2y + 1^2 = 14 + 2$

(
x
−
+ y
1)
$^2 + (y - 1)^{2-}$
− = 16

Por lo tanto, es una circunferencia con centro en C = (1, 1) y radio r = 2, después de trasladarse el origen al punto P = (−2, 2).

4
C k
2
−2 h

c. Para encontrar el punto al cual se sebe trasladar el origen se debe pasar la ecuación a la forma canónica y reemplazar los valores x e y por los valores de la ecuación de rotación.

$4x^2 + 8x + y^2 10y + 10 = 25_-$

$4 x^2 + 2x + y^2 10y = _-10_-$

$4 x^2 + 2x + 1^2 + y^2 10y +5^2 = _-10 + 1 + 25_-$

$4 (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$

$4(x+1)^2 + (y-5)^2 = 16\ 16\ 16\ 16$

$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 14\ 16$

Como h = 1 y k = -5, ahora reemplazamos estos valores en la ecuación de traslación, entonces:

$(x\_h+1)2 + (y\_k\_5)2 = 1_{4\ 16}$

$(x-1+1)^2 + (y-(-5)-5)^2 = 14\ 16$

$(x1)^2\ (y)^2$

$_4 +_{16} = 1$ 4.2. EJERCICIOS TRASLACIÓN DE EJES 141

4

C k

$2\ -^{2}\ h$

4.2. Ejercicios traslación de ejes

1. Encuentre h y k, al igual que la ecuación de traslación en términos de x y y tal que el centro de la gráfica esté sobre el origen:

a. $9x^2 4y^2 + 36x - 24y - 36 = 0_-$

4.3. Rotación de ejes

La rotación es un giro que se hace para cambiar la orientación teniendo como base un punto fijo (llamado eje de rotación[1]) y un ángulo θ que indica el cambio de orientación.

Considérese una trasformación de los ejes coordenados, tal que los nuevos ejes coincidan en el origen el cual sirve de eje de rotación, además estos nuevos ejes deben tener una orientación diferente a los ejes originales, al rotarse un ángulo determinado. Sean ox y oy los ejes del plano cartesiano, o x y o y los y x P (x , ynuevos ejes después de aplicar x1 θP (x, y) una rotación de θ grados, donde y y1θ es el ángulo de rotación xox . ySupóngase que un punto P (x, y)

en el plano cartesiano coin$_N$ Nx cide con un punto P (x , y)

en el nuevo sistema coordena$^{\theta}$ Nx do.

1

Figura 4.1: Rotación de ejes Este eje de rotación puede estar en el centro, el contorno o exterior a la figura.

entonces:

x = OM = ON − M N donde

M N = M N$\Rightarrow$ x = ON − M N = x cos (θ) − y sen (θ) y = P M = M M + M P donde M P = N N$\Rightarrow$ x = N N +

M P = x sen (θ) + y cos (θ)

Luego la transformación de una coordenada por rotación de ejes se determina por:

$x = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$

y $y = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$

4.3.1. Rotación de ejes para ecuaciones

Para rotar la ecuación de un lugar geométrico, se hace uso de las ecuaciones de rotación, reemplazando el ángulo que se da en la función trigonométrica. En la siguiente tabla se muestran los valores de ciertos ángulos:

Radianes $0^{\pi\ \pi\ \pi\ \pi\ 4\pi\ 5\pi}$ π Grados $0^{o\ 6o\ 4o\ 3o\ 2o\ 6\ o\ 6\ o}$30 45 60 90 120 150 180 Sen (θ) $0^{1\ \sqrt{2}\ \sqrt{3}}$ $1^{\sqrt{3}\ \sqrt{3}}$ $1_{2\ 2\ 2\ 2}$ −1 −Cos (θ) 1 √3 √ 2

2 1 0 -1 $0_{2\ 2\ 2\ 2\ 2}$

T g (θ) $0^{\sqrt{3}}$ 1 √3 N.E −√3 −√3 N.E$_3$

Cuadro 4.1: Valores del Seno y Coseno de un ángulo correspondiente

Ejemplo

Encuentre el punto P = (x ,y) al que debe trasladarse el punto P = (2,−3) ; mediante una rotación θ = 120°.

Solución

Partiendo de las ecuaciones de rotación $x = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$ y $y = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$, se debe reemplazar los valores dados, entonces:

2 =

x

cos

(120

∘
)
−
y
sen
(120
∘
)
⇒
2 =
1_x √3
$-^2 y^2$

−3 = x sen (120∘) + y (120∘) ⇒ −3 = $^{\sqrt{3}}$ x + ^{1}y para encontar los$_{2\,2}$
valores de x y y se debe solucionar un sistema de 2 x 2, entonces:
2 =
1 √3
2x − 2 y multiplicando la ec,1 por −√3 −3 = $^{\sqrt{3}}$ x + ^{1}y$_{2\,2}$
para eliminar la variable x se tiene:
−
2
√
3 =
√3
−√3 x + 12y 2 x + ^{3}
−3 =$_{2\,2}$y ⇒ y = −^{3}− $^{2\sqrt{3}}$ x ≈ −3,23$_2$ ⇒
−3 − 2√3 = 2y
multiplicando la ec,2 por √3 para eliminar la variable y se tiene:
2
=
1_x √3
− 2 y2 √3 y ⇒ x = ^{2}−$^{3\sqrt{3}}$ x ≈ −1,6−3√3 =^{3}
2x + 2 2 ⇒ 2 − 3√3 = 2x
por lo tanto, el punto debe trasladarse al punto P = (−3,23, −1,6), después de haber rotado los ejes 120∘.

4.3.2. Ejercicios propuestos rotación de ejes

1. Dadas las coordenadas x e y, encuentre las coordenadas de x y y del punto que se da, si se rotan los ejes coordenados alrededor del origen un ángulo θ:

P = (2,−1) ;θ = 30∘ P = (−2,−2) ;θ = 90∘ P = ($-_{1,}$ 3) ;θ = 45∘
P = (5, 3) ;θ = 60∘

2. Emplee las ecuaciones de rotación para obtener una ecuación dado un ángulo θ

3
x
−
4
y
+ 10 = 0
si
senθ
=
^{3} y cosθ = ^{4}
5 5

2 x^2 + 3xy + 2y^2 7 = 0 si θ = 45∘

x − 2y − 3 = 0si¯ senθ = − ^{5} y cosθ = ^{12}
x
2
+
y
2
= 25
si
θ
= 60
13 13
∘
5
x
^{2} + 4xy + 8y^2 36 = 0 si senθ =^{2} y cosθ =^{1}
√5 √5 x^{2-} = 0 si θ = 45∘− 2xy + y^2 3x−

4.4. Simplificación por rotación y traslación

La ecuación general de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde al menos una de las constantes A, B y C debe ser diferente de cero, para que la variable x e y aparecen en la ecuación, esta fórmula se transforma en $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, en donde el término x y se anulara si y solo si el coeficiente B = 0, haciendo uso de las identidades trigonométricas[2], por lo tanto θ debe satisfacer la ecuación

tan

2

θ

=

B

$_{A-C}$; $A = C$

o bien $\theta = 45_{\circ}$; si $A = C$

Ejemplo

Encuentre a la que se transforma y el ángulo de rotacion de $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$ y grafique

Solución

De la ecuación se sabe que $A = 2$, $B = \sqrt{3}$ y $C = 1$ entonces:

tan $2\theta =^{\sqrt{3}}$ $2\theta = \arctan\sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = 60 \Rightarrow \theta = 30,_{2-1} \Rightarrow$

luego se reemplaza en la ecuación teniendo en cuenta la tabla, entonces

$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 8$

$2(x\cos(30) - y\,\text{sen}(30))^2 + \sqrt{3}(x\cos(30) - y\,\text{sen}(30))(x\,\text{sen}(30) + y\cos(30)(x\,\text{sen}(30) + y\cos(30))^2 = 8$

$2\,x^{\sqrt{3}}\,y^{1\,2} + \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}}\,y^{1}\,x^{1} + y^{\sqrt{3}} + x^{1} + y^{\sqrt{3}\,2} =_{2-22-22222}8$

$2^3x^{2\,\sqrt{3}}\,x\,y + {}^1y^2 + \sqrt{3}^{\sqrt{3}}\,x^{2\,\sqrt{3}}\,y^2 + {}^1x^2 + {}^{\sqrt{3}}\,x\,y + {}^3y^{2\,2} =_{4-244-4424}$

8

$5x^2 + y^2 = 16$

$x^2 + y^2$

$_{16} = 1$

$_5\,16$

2

$2\,\text{sen}\theta\cos\theta = \text{sen}2\theta$

$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos2\theta$

y
4
y
3
2
x
1
α = 30x
-3-2-1 1 2 3
-1
-2
-3 -4

4.4.1. Ejercicios simplificación por rotación y traslación

1. Encuentre a la que se transforma y el ángulo de rotacion y grafique para :

a. $2x^2$ $3xy + 2y^2$ $x + y - 1 = 0$

b. $2x^{2-}$ $10xy + y^{2-}$ $10x + 2y + 13 = 0$

c. $52x^{2-}$ $72xy + 73^{-2}$ $104x + 72y = 48-$ y

$^2 = 2^-$d. $45 + 4xy - 2y$

e. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$

2. Un técnico de una empresa de televisión por cable, determina que la ubicación de la antena parabólica se debe ubicar siguiendo la ecuación

$4x^2$ $4xy + y^2$ $2x - 14y + 7 = 0$. Usted debe determinar ¿A qué punto se − − debe desplazar y en que ángulo se debe instalar la antena parabólica?.

4.5. Identificación de una cónica

Una ecuación de segundo grado de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se puede identificar como una sección cónica cuando el discriminante:

– B^2 4AC < 0 es una elipse–

– B^2 4AC = 0 es una parábola–

– B^2 4AC > 0 es una hipérbola.–

En ocasiones una sección cónica, al ser rotada puede sufrir una transformación, la cual recibe el nombre de cónica degenerada; para casos particulares, la ecuación puede presentar una degeneración en:

– Dos rectas
– Un punto
– Dos rectas imaginarias.

Estas transformaciones se pueden realizar haciendo uso de los casos de factorización.

Ejemplo

Identificar la naturaleza de la curva $9x^2$ 6xy + y^2+ 9x–3y + 2 = 0 y determinar si se puede degenerar o no.¯

Solución

Para identificar la naturaleza se hace uso del discriminante

B^2 4AC = $(-6)^2$ 4 (9) (1) = 0 o sea que es una parábola, para– – determinar si se puede degenerar, se debe tratar de factorizar por agrupación.

$9x^2$ 6xy + y^2 + (9x – 3y) + 2 = 0 $(3x^{-})^2$ + 3 (3x – y) + 2 = 0 – y

Observe que la ecuación queda de la forma x^2+bx+c, sea x = 3x –y donde a = 1, b = 2 y c = 2, entonces la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ se factoriza como $(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow (3x - y + 2)(3x - y + 1) = 0$, por lo tanto la ecuación que identifica una parábola se transforma en dos rectas cuyas ecuaciones son $3x - y + 2 = 0$ y $3x - y + 1 = 0$

4.5.1. Ejercicios propuestos identificación de cónicas

1. Haciendo uso del discriminante identifique, ¿Qué tipo de gráfica es? Y determine si se puede degenerar o no.

a. x^2 14xy + 9x – 7y + 13 = 0

b. $6x^{2-}$ 2xy + y^2 + 2x + 3y = 41

c. $3x^{2-}$ 12xy + $3y^2$ + 6x – 4y = –8

d. $3x^{2-}$ 6xy + $3y^2$ 6x + 6y = –8

e.

x

2

–

+ 2xy + y2 – 2y = 0– 2x –

4.6. Reflexión

Un lugar geométrico puede reflejarse con respecto a uno de los ejes cartesianos o a una oblicua, de tal forma que la nueva gráfica tenga la misma forma pero dirección contraria al eje o la oblicua que se está tomando como referencia. En general, deducir la ecuación de una curva reflejada puede ser complicado, ya que requiere de trasladar y rotar la ecuación en múltiples veces. Sin embargo, respecto a ciertas posiciones es fácil hacer la reflexión.

Una ecuación de segundo grado de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se le puede hacer la reflexión:

4.6.1. Respecto al eje y

Para hacer una reflexión de una sección cónica con respecto al eje y, basta con reemplazar la variable x por –x, es decir, $A(-x)^2 + B(-x)y + Cy^2 + D(-x) + Ey + F = 0$, de tal manera que la ecuación de segundo grado se transforma en:

Ax^2 Bxy + Cy^2 Dx + Ey + F = 0– –

Ejemplo

Dada la elipse rotada cuya ecuación es $40x^2 + 30xy + 32y^2 - 186x - 87y = -150$, realice la reflexión con respecto al eje y.

Solución

Para reflejar con respecto al eje y, sustituimos la variable x, entonces:

$$40x^2 + 30xy + 32y^2 - 186x - 87y = -150$$

$$40(-x)^2 + 30(-x)y + 32y^2 - 186(-x) - 87y = -150$$

$$40x^2 - 30xy + 32y^2 + 186x - 87y = -150$$

4 y

Eje de simetría

2

–4 –2 2 4 x

40x2 + 30xy + 32y2 186x – 87y = –150 –2 –

$40x^2\ 30xy + 32y^2 + 186x - 87y = -150-$

4.6.2. Respecto al eje x

Para hacer una reflexión de una sección cónica con respecto al eje x basta con reemplazar la variable y por –y, es decir, $Ax^2 + Bx(-y) + C(-y)^2 + Dx + E(-y) + F = 0$, de tal manera que la ecuación de segundo grado se transforma en:

$Ax^2\ Bxy + Cy^2 + Dx - Ey + F = 0-$

Ejemplo

Dada la elipse rotada, cuya ecuación es $6x^2-6xy + 8y^2+ 8x-25y = -15$, realice la reflexión con respecto al eje x.

Solución

Para reflejar con respecto al eje x, sustituimos la variable x, entonces:

$6x^2 - 6xy + 8y^2 + 8x - 25y = -15$

$6x^2 - 6x(-y) + 8(-y)^2 + 8x - 25(-y) = -15$

$6x^2 + 6xy + 8y^2 + 8x + 25y = -15$

y

2

1

$6x^2\ 6xy + 8y^2 + 8x - 25-$

2

6

x

2

1_2 1 2

$^-$ + 6xy + 8y + 8x + 25y

-1

-2 -3

4.6.3. Respecto al origen

Para hacer una reflexión de una sección cónica con respecto al origen, se debe hacer la reflexión simultanea, tanto en el eje x como en el eje y, para ello basta con reemplazar la variable x por –x y y por –y, es decir, $A(-x)^2 + B(-x)(-y) + C(-y)^2 + D(-x) + E(-y) + F = 0$, de tal manera que la ecuación de segundo grado se transforma en:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2\ Dx - Ey + F = 0-$

Ejemplo

Dada la hipérbola rotada cuya ecuación es $4x^2-32xy + 4y^2+ 49x + 49y = 112$, realice la reflexión con respecto al origen.

Solución

Para reflejar con respecto al origen sustituimos las variables x e y, entonces:

$4x^2 - 32xy + 4y^2 + 49x + 49y = 112$

$4(-x)^2 - 32(-x)(-y) + 4(-y)^2 + 49(-x) + 49(-y) = 112$

$4x^2 - 32xy + 4y^2 - 49x - 49y = 112$

y

3

2

1

$4x^2\ 32xy + 4y^2 + 49x + 49y =-$

$-4-3-2-1\ 1\ 2\ 3^x$

-1

$4x^2\ 32xy + 4^{y2}\ 49x - 49y = 112- -2-$

$-3\ -4$

4.7. Cuestionario unidad 4

1. En una ecuación de segundo grado de la forma:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando el discriminante $B^2\ 4AC = 0$, genera:-

a) Una elipse

c) Una circunferencia b) Una hipérbola d) Una parábola

2. Para determinar x e y , después de hacer una traslación de ejes en términos de x e y, h y k, se utiliza:

a) $x = x + h \wedge y = y+k$ b) $x = -x + h \wedge y = -y+k$ c) $x = x - h \wedge y = y -k$ d) $x = -x - h \wedge y = -y-k$

3. ¿Cual ecuación resulta después de girar la ecuación de segundo grado $45x^2 - 32xy + 45y^2 = 110$ un ángulo $\theta = 45^o$?

a) $29x^2 + 45y^2 = 110$ b) $45x^2+ 45y^2+ 16x-16y = 110$ c) $45x^2 + 29y^2 = 110$ d)$61x^2 + 61y^2 = 110$ 4.7. CUESTIONARIO UNIDAD 4 151

4. Una curva está representada por la ecuación
$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$ ¿Cuál es su ecuación cuando se trasladan los ejes al nuevo origen O = (−2, 3)?.

a) $(y - 2)^2$ 8 (x +3) = 0 b) $(y - 3)^2$ 8 (x +2) = 0 c)
y
2
−
8x = 0 d) $(y + 3)^{2 -}$ 8 (x −2) = 0− −

5. Determine el ángulo que deben girar los ejes para que la transformación de la ecuación $7x^2$ $6\sqrt{3}xy + 13y^2$ $16 = 0$ carezca de término x y :− −

a) θ = 90° b) θ = 30° c) θ = 60° d) θ = 0°

6. Para reflejar una sección cónica con respecto al eje x se cambia:
a) x por −x b) y por −y c) x por $_y$ d) y por $_x$

CAPÍTULO5

COORDENADAS POLARES

"No sé cuál es el camino correcto, ya que estas coordenadas me indican un rumbo que desconozco".

En esta unidad se introduce un nuevo sistema de coordenadas, algunos ejemplos que ilustran su utilidad, a través de ecuaciones y gráficas de algunas curvas clásicas.
153

Existen varios tipos de sistemas coordenados, los cuales sirven de referencia; El sistemas rectangular o cartesiano es con el cual se trabaja frecuentemente; además de este sistema, existen otros sistemas de coordenadas alternativos como: el complejo, el esferico, el cilíndrico y las polares.

A diferencia del sistema rectangular donde un punto se ubica en función de sus distancias del origen a x y y, o sea P (x, y); las coordenadas del mismo punto en otro sistema de coordenadas puede cambiar, por ejemplo: si el mismo punto se ubica en función de la distancia a un punto fijo y la dirección con respecto a una recta fija, se llamará Coordenadas polares.

5.1. Plano polar

Para graficar algún elemento en coordenadas polares se toma como referencia un punto O, el cuál se llamará origen o polo y una semirecta OA que es llamada eje polar:
O Eje Polar A

5.1.1. Punto en plano polar

La posición de cualquier punto
P en el plano polar se determina P(r, θ) por la distancia del polo al punto
(semirecta OP) demoninada r, la cual es llamada radio vector y el ángulo generado entre el eje polar y el radio vector (∠AOP) deno
tado por θ[1], el cual es llamado θ
ángulo vectorial. O A

[1] Para medir un ángulo, se toma como positivo si se mide en sentido contrario a1 giro de las manecillas de un reloj, o negativo, si lleva el mismo sentido al giro de las manecillas de un reloj. Recuerde: si en la calculadora va a trabajar en términos de π, utilícela en radianes (rad), si a trabajar con grados en deg.

Por lo tanto, las coordenadas de un punto P en coordenadas polares queda determinado por :

P (r, θ)

Si r es negativ o, el punto se ubica en la prolongación del radio v ector:

θ

O A

P (−r, θ)

Ejemplo

Ubicar los siguientes puntos en el plano polar

P

(4

,

π), P (4, 15π −

12

), P

(

−

4

,

15π) y P (−4, 15π)4

12 12

•

P

(4

,

π) • P (4, 15π

−

12)4

P (4, 4 15π π) P (4,− 12)

θ

=

15π

−

12

θ

=

π
4
O A O A
•
P
(
–
4
,
15π) • P (–4, π
– 4) 12
P
(
–
4
,
15π) P (–4, π
– 4) 12
θ
=
15π 12
O A O A π θ = –4

Como se vio en el ejemplo anterior, un punto P (r, θ) puede estar representado por una cantidad coordenadas polares, lo que no sucede en coordenadas cartesianas, pues cada punto P (x, y) tiene una única representación, por tal motivo en polares se debe restringir el dominio a $0^o < \theta < 360^o$

En general, el punto P (r, θ) puede expresarse como P (r, θ) = P (r, θ + 2πn) o P (r, θ) = P (–r, θ + (2n + 1) π), donde n es cualquier entero.

El ángulo polar puede expresarse en grados o radianes como se ve en el siguiente plano polar[2]:

æ 7 p ö æ p öæ 5 p öç 1 2 ÷ ç 2 ÷ ç 1 2 ÷è ø è ø è ø
90
0
2
p

ö
105
0
æ 75^0
ç 3 ÷
è ø 120^0 æ p ö 3
p
ö
60
^{0} ç$_3$ ÷ ^{æ} è ø$_{ç\ 4\ ÷}$
è ø æ p ö135^0 45^0
ç 4 ÷
è ø æ^{5}p ö
ç $_6$ $^÷$ 150^0 æpö$_{è\ ø\ 30^0}$
ç6 ÷
è ø
æ
ç 1 1 p ö æp ö è
1 2
÷165^0
ø
15^0 ç$_{12}$ ÷ è ø
( ) 180^0 $_0{}^0$
( )
360^0
1950 345 æ 2 3 p ö æ 1 3 p ö ç 1 2 ÷ç 1 2 ÷ è øè ø
210^0 ^{0}
æ
7

p
ö
$330_{æ}$ 1 1 p ö
ç 6 ÷ ç 6 ÷ è ø è ø
225^{0} 315^{0} æ
1 5
p
ö
$æ^{7}$ p ö ç 4 ÷
ç 1 2 ÷ è øè ø 240^{0} 0_{300}
æ 4 p ö 255^{0} 0 285^{0} æ 5 p ö ç 3 ÷ 270 ç 3 ÷è ø è ø æ 1 7 p ö æ 3
p ö æ 1 9 p öç 1 2 ÷ ç ç
2
÷
è
1 2
÷
è ø è ø ø

Figura 5.1: Plano Polar.

5.1.2. Ejercicios propuestos

De 4 pares de coordenadas polares donde tenga que utilizar r > 0 y r < 0, θ > 0 y θ < 0 para cada punto dado.

[2] En el Cd, en una carpeta con el nombre pdf se encuentra un archivo con planos polares cuyo nombre es planopolar.pdf, el cual puede imprimir para realizar sus respectivos ejercicios.

P
1
2
,

π , P_3 –4, 5π

– 6 P_5 1, π $P^{7\pi\ 2,4\ \pi}$, P_4 3,– 6 , P_6 (–3, 2π)2 –3,6

Actividad

Un cañón está defendiendo la isla de unas embarcaciones piratas, haciendo varios disparos:

P

1

5

,

7π P_4 4, π P_7 (5, π) P_9 2, 3π

12 6 4

P_2 (4, 75◦) P_5 (5, 75◦)

P_3 3, π P_6 5, 2π P_8 9, 122,5◦4 3 2

Determine ¿Cuál de ellos impactó en los barcos piratas?.

5.2. Relación entre coordenadas polares y cartesianas

Para realizar el cambio de coy P(x, y) ordenas cartesianas a coordenadas P(r, θ) polares o viceversa, debemos con siderar un punto P (r, θ), supongryamos que el eje polar OA coincide con el semieje positivo x y el poloxO con el origen del sistema de coorθ denadas rectangulares, sea P (x, y), O^x Ala coordenada rectangular del mis mo punto P.

Veamos que haciendo una prolongación perpendicular desde el eje x o el eje polar al punto P se forma un triángulo rectángulo, entonces para cambiar de coordenadas polares a cartesianas:

• $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{r}$ despejando x se tiene:

$x = r\cos(\theta)$

• $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$ despejando y se tiene:

$y = r\,\text{sen}(\theta)$

Ahora para cambiar de cordenadas cartesianas a polares debemos determinar el radio, el cual se toma como la distancia punto a punto (polo y punto P) o el teorema de Pitágoras siendo r la hipotenusa obteniéndose:

$r = x^2 + y^2$

Para determinar el ángulo

θ
se toma
cateto opuesto $= y$ $tg\theta = y$ cateto adyacente $x \Rightarrow x$
y al despejar el ángulo θ se obtiene:
$\theta = arctg^{y}$; $x = 0_{x}$

Ejemplo 1

Dado el punto $P = (3, ^{\pi})$ en coordenadas polares, encuentre este$_{3}$ punto en coordenadas cartesianas.

Solución

Tenemos a $r = 3$y $\theta = ^{\pi}$ y se desea encontrar x e y, entonces:$_{3}$
x
= 3
cos
π
$_{3}\, x = 3\ (0{,}7) \Rightarrow x = 2{,}12$ y
$y = 3sen^{\pi \Rightarrow}\ x = 3\ (0{,}7) \Rightarrow x = 2{,}12_{3} \Rightarrow$
Entonces el punto en coordenadas cartesianas es P = (2,21, 2,12).

Ejemplo 2

Dadoa los puntoa Q(3,−4) y R(−1,−3) en coordenadas cartesianas, encuentre este punto en coordenadas polares.

Solución

a. Tenemos para el punto Q que x = 3 e y = −4, y se desea encontrar a r y θ, entonces:
$r = (3)^{2} + (-4)^{2}$ $r = \sqrt{9 + 10} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$ θ
=
arctg
−
4
$\Rightarrow$
$\theta = -53{,}13^{\circ})_{3} \Rightarrow$
entonces, el punto en coordenadas polares es $Q = (5, -53{,}13^{\circ})$.

b. Tenemos para el punto R que x = −1 e y = −3, $r = (^{2} + (-3)^{2}$ $r = \sqrt{1 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{10} \Rightarrow r = 3{,}16_{-1}) \Rightarrow$
$\theta = arctg_{-}^{3}$ $\theta = arctg\ (3) \Rightarrow \theta = 7156^{\circ})$.

$_{-}^{1} \Rightarrow$

Así, el punto en coordenadas polares es R(3,16, 7156∘), pero al ubicarlo observe que no coincide en el cuadrante del plano cartesiano, para ello se debe tener en cuenta el cuadrante donde se encuentra el punto en coordenadas cartesianas, así el ángulo θ se define como:

$\tan^{-1} y$ si (x, y) esta en los cuadrantes I y IV x

$\theta = \tan^{-1} y + \pi$ si (x, y) esta en el cuadrante II x

$y\ \pi$ si (x, y) esta en el cuadrante III.$_{-}^{1}\tan_{x\,-}$

5.3. Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Para hallar la distancia entre dos puntos polares $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$, se hace una construcción auxiliar entre P_1 y P_2 generando un triángulo de vértices OP_1P_2, del cual se conocen dos lados, el lado faltante corresponde a la distancia entre los dos (2) puntos P_1P_2, aplicando la ley del coseno[3]:

[3]Se utiliza la ley del coseno cuando se conocen 2 lados de un triángulo y el ángulo entre ellos

$P_1(r_1, \theta_1)$

$D P_1 P_2$

$\theta 2 - \theta 1$ $P_2(r_2, \theta_2)$ θ_2 θ_1

O A

Entonces la distanciaentre dos puntos P_1 y P_2 en coordenadas polares esta dada por:

$D_{P1P2} = r^2 + r^2\ 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)_{1\,2\,-}$

Ejemplo

Halle la distancia entre los puntos polares

P

1

= (3

, π

) y P

2

= 4 ,

π 2
Solución
Reemplazando los valores en la fórmula, se obtiene:
D
P
1
P
2
=
(3)
^{2} + $(4)^2$ 2 (3) (4) cos π^{π} − 2−
D
P
1
P
2
=
9 + 16
−
24
cos π 2
Ley de Cosenos
C
c a
α B
^{b}A
$c^2 = a^2 + b^2$ 2abcos(α)−

D_{P1P2} = 25 − 24 (0)
$D_{P1P2} = \sqrt{25} = 5$ por lo tanto la distancia entre P_1 y P_2 es 5.

5.4. Ejercicios puntos en polares

1. Encuentre las coordenadas cartesianas del punto dado:
P
1
4

,
π
P
3
(3
,
120
o
)
P
5
2 ,
-3_{0P2-2}
2π
$^{4\pi},^{\pi}$ $P_{4\,-3,-6}$ P_6 1, 330_3
2. Encuentre las coordenadas polares del punto dado
P_1 (3, 3) P_3 (−2, 2) P_5 (−3, 0) P_2 (−1, 4) P_4 (−4, 2) P_6 (1, 5)
3. Escriba otros tres (3) pares de coordenadas polares para cada punto, restrinja los angulos para que no excedan de 2π.
P_1 (3, 540^o) P_3 $-4,-750^0$ P_2 -2, 620^0 $P_{4\,3,}-1125^0$
4. Encontrar el Area del triángulo formado por los puntos:
A = (0, 0^o), B = (−4, 330^o) y C = (5, 300^o)
5. Hallar el perimetro del cuadrilitero c u y o s virtices son:
A = (0, 0^o), B = (1, 60^o) , C = (2, 45^o)y D = (3, 15^o)
6. Determinar si los puntos A = (1, 60^o), B = √3, 30^o y C = (−1, 180^o)son los vértices de un triángulo equilitero.

5.5. Transformación de ecuaciones

Para trasformar ecuaciones de coordenadas cartesianas a polares se deben hacer los reemplazos correspondientes y despejar la variable r de la ecuación resultante.

Ejemplo

a. Dada la ecuación cartesiana $x^2 + y^{2\,2} = 10xy$, transfórmela a coordenadas polares.
b. Transforme las ecuación r = 6cos(θ) a coordenadas cartesianas.
Solución

a. Haciendo los reemplazos tenemos que:

$x^2 + y^{2\,2} = 10xy$

$r^{2\,2} = 10xy$

$r^2 r^2 = 10xy$

r

$2 = 10xy\, r^2$

r

$2 = 10xy\, rr$

$r^2 = 10\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)$

$r^2 = 5x2\cos(\theta)\ \mathrm{sen}(\theta)$ por identidadas[4]

$r^2 = 5\mathrm{sen}(2\theta)$

b. Reemplazando las ecuaciones de r y θ:

$r = 6\cos(\theta)$ $r = 6^x$

r

2

r

= 6

$x^2 + y^2 = 6$

5.6. Ejercicios transformación de ecuaciones

1. Dada la la ecuación polar, encuentre la ecuación cartesiana.

a.

r

=

_3

$2\_\cos(\theta)$

b. $r = _{2\mathrm{sen}(\theta)-}{}^{1}$

c.

r

= 3 + 2

$\_2\cos(\theta)$

$\mathrm{sen}(\theta)$

d. $r = 5\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)$

2. Encuentre la ecuación polar $r = f(\theta)$ de la curva descrita por la

[4] $2sen(\theta)cos(\theta) = sen(2\theta)$

ecuación cartesiana dada.

a. $r = 5y - 4x = 2$

b. $r = 3cos(\theta)$

c. $x^2 + y^2 2x + 3 = 0-$

d. $xy + 3 = 0$

5.7. Recta polar

Para representar la recta en cordenadas polares debemos transformar la ecuación $Ax + By + C = 0$ en cordenadas polares:

$Ax + By + C = 0$ haciendo cambio coordenadas

$A(r\cos(\theta)) + B(r\,sen(\theta)) = -C$ despejando r

$r(A\cos(\theta) + B\,sen(\theta)) = -C$ factorizando r y luego despejando, se obtiene:

$$r = \frac{-C}{A\cos(\theta) + B\,sen(\theta)}$$

donde:

$-\frac{C}{A}$ es el corte con la perpendicular al eje polar.

$-\frac{C}{B}$ es el corte con el eje polar.

Las ecuaciones son de la forma:

– $r = \frac{-C}{A\cos(\theta)}$ Si la recta es vertical toma la forma.

– $r = \frac{-C}{B\,sen(\theta)}$ Si la recta es horizontal toma la forma.

Ejemplo

Dada la ecuación de la recta $r = \frac{-4}{2sen(\theta) - 4\cos(\theta)}$

Solución

La recta debe pasar por el eje polar en $\frac{-4}{-4} = 1$ y por la perpendicular por

$$\frac{-4}{2} = -2$$

5.8. La ecuación de la circunferencia en coordenadas po

lares

La ecuación polar más simple es r = a donde a es una constante, esta ecuación genera una circunferencia con centro en el origen y radio a, veamos que:

r = a cambiando a cartesianas

$x^2 + y^2 = a$ $x^2 + y^2 = a^2$

Si el centro de la circunferencia esta sobre el eje x en el punto P (a, 0) y radio r = a, se tiene:

$(x - a)^2 + y^2 = a^2$

x^2 $2xa + a^2 + y^2 = a^2$

2

−

$x + y^2 = 2xa$

$r^2 = 2r\cos(\theta)a$

$r = 2a\cos(\theta)$

es decir si el centro de la circunferencia esta sobre el eje polar y un punto de la circunferencia es el polo la ecuación es de la forma $r = 2a\cos(\theta)$

Si el centro de la circunferencia esta sobre el eje y en el punto P (0, a) y radio r = a, se tiene:

$x^2 + (y - a)^2 = a^2$

$x^2 + y^2$ $2ya + a^2 = a^2$

2

+

y

2

−

$x = 2ya$

$r^2 = 2r\mathrm{sen}(\theta)a$

$r = 2a\mathrm{sen}(\theta)$

es decir el centro de la circunferencia esta sobre perpendicular a el eje polar que pasa por el polo y un punto de la circunferencia es el polo la ecuación es de la forma $r = 2a\mathrm{sen}(\theta)$

5.9. Simetrías

En coordenadas polares también hay criterios para determinar la simetría de una gráfica, como en coordenas cartesianas.

– Si la ecuación no se modifica al sustituir θ por −θ; la curva es simétrica con respecto al eje polar, es decir, cuando la función está en términos de la función coseno[5].

– Si la ecuación no se modifica al sustituir θ por π − θ; la curva es simétrica con respecto a la perpendicular al eje polar que pasa por el polo es decir, cuando la función está en términos de la función seno.

5.10. Gráficas en coordenadas polares

En coordenadas polares ciertas ecuaciones de la forma $r = f(\theta)$ cuyo dominio está entre 0 y 2π, generan gráficas particularres como lo son: el espiral, limacón, trébol y lemniscata.

5.10.1. Espiral

La gráfica de estas ecuaciones no dependen de ninguna función trigonométrica, sólo del ángulo θ y son ecuaciones de la forma $r = n\theta^k$ en donde $n \in R$ y $k > 0$, lo qué indica que amplitud va a tener la espiral, por no depender de ninguna función trigonometrica esta ecuación no tiene simetría.

5.10.2. Limacón

También llamado caracol por la forma que genera su gráfica. Estas gráficas tienen por ecuación:

[5]La función cosθ es par, entonces $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

$r = a \pm b\text{sen}(\theta)$ y $r = a \pm b\cos(\theta)$

donde a y b son positivos, dependiendo de estos valores, la gráfica puede cambiar:

Si $a > b$ Si $a = b$ Si $a < b$

La gráfica es llamada cardiode cuando $a = b$, caracol si $a > b$

Se debe tener cuidado con los signos de la ecuación, puesto que ellos influyen en el sentido de la gráfica

Ejemplo

a. Graficar la curva llamada cardiode, cuya ecuación polar es $r = -$

4 (−1 + cos (θ)) .

b. Graficar la curva cuya ecuación polar es $r = 3^1 + \text{sen}(\theta) ._2$

c. Graficar la curva cuya ecuación polar es r = −2 + cos (θ) .

Solución

a. Se debe organizar la ecuación, entonces r = 4 − 4cos (θ)

$^{a = 4}$ a = b por lo tanto es un cardioide$_{b = 4 \Rightarrow}$

Como la ecuación está en términos del coseno y esta es una función par, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje polar, por lo tanto, los valores para el ángulo son 0 < θ < 180◦ y se hace la simetría correspondiente.

r 0◦ 30◦ 60◦ 90◦ 120◦ 150◦ 180◦ f (θ) 0 0,54 2 4 6 7,6 8 b. Se debe organizar la ecuación, entonces $r = {}^3 + 3\text{sen}(\theta),_2$ a

=

3

^{2} a < b por lo tanto es un caracol$_{b = 3 \Rightarrow}$

Como la ecuación está en términos del seno, entonces la gráfica es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar y que pasa por el polo, por lo tanto, los valores para el ángulo son 270◦ < θ < 90◦ y se hace la simetría correspondiente.

r 270◦ 300◦ 330◦ 0◦ 30◦ 60◦ 90◦ f

(

θ

)

^{3} 1,1 0,00008^3 3 3,1^9

2− 2 2

c. Se debe organizar la ecuación, entonces r = −2 + cos (θ),

$^{a = 2}$ a > b por lo tanto es un limacón$_{b = 1 \Rightarrow}$

Como la ecuación está en términos del coseno y este es una función par, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje polar, por lo tanto, los valores para el ángulo son 0 < θ < 180◦ y se hace la simetría correspondiente.

r 0◦ 30◦ 60◦ 90◦ 120◦ 150◦ 180◦ f

(

θ

)

−

1

–
1
,
13
-
3 2 5
_2 _129 _32

5.10.3. Tréboles

Se llaman curvas de trébol a la gráfica de las ecuaciones de la forma:
$r = a\ sen(n\theta)$ y $r = a\cos(n\theta)$

Donde n es un entero positivo mayor que 1. La gráfica está formada por lazos cerrados igualmente espaciados, que parten del origen. El número de lazos (hojas o pétalos) depende del entero n, ya que:

– Si n es impar hay n hojas
– Si n es par, hay 2n hojas

Si se desea saber cuál es la separación de los pétalos se deben dividir los 360 grados en la cantidad de pétalos y para determinar en dónde empieza el primer lazo, se deben igualar a 1 las funciones sen(nθ) y cos(nθ), ya que es el mayor valor que alcanzan estas funciones, luego, se debe despejar el ángulo θ.
El valor a indica la longitud de la hoja.

Ejemplo

Bosqueje la gráfica de las ecuaciones $r = 3sen(2\theta)$ y $r = 4sen(5\theta)$

Solución

a. Sea $r = 3sen(2\theta)$. Como vemos $a = 3$ y $n = 2$, por lo tanto, esta gráfica es un trébol que tiene 4 pétalos, ya que n es par, el radio es 3 (longitud de la hoja). Como el número de pétalos están igualmente espaciados, cada uno debe tener una separación de 90^o a partir del primer pétalo.
El problema ahora es encontrar dónde está el primer pétalo, para esto tomamos el mayor valor que puede alcanzar la función seno, el cual es 1, y este valor se alcanza cuando $x = \pi/2$, veamos que:
$sen(2\theta) = 1$

$(2\ \theta) = sen_{-}^{1}(1)$
$2\theta = \pi/2$
$\theta = \pi/4$

Entonces nuestro primer pétalo está en un ángulo de $\pi/4$, el segundo a $3\pi/4$, el tercero a $5\pi/4$ y el último a $7\pi/4$.

b. Sea $r = 4\cos(5\theta)$. Como vemos $a = 4$ y $n = 5$, por lo tanto, esta gráfica es un trébol que sólo tiene 5 pétalos, ya que n es impar, la longitud de la hoja es 4. Como el número de pétalos están igualmente espaciados, cada uno debe tener una separación de 72^o a partir del primer pétalo.

El problema ahora es encontrar dónde está el primer pétalo, para esto tomamos el mayor valor que puede alcanzar la función seno, el cual es 1, y este valor se alcanza cuando $x = \pi/2$, veamos que:

$\cos(5\theta) = 1$

$(5\theta) = \cos_{-}^{1}(1)$

$5\theta = 0$

$\theta = 0^o$

Entonces nuestro primer pétalo está en un ángulo de 0^o, el segundo a 72^o, el tercero a 144^o, el cuarto en 216^o y el último a 288^o

Cuando la ecuación de una curva de trébol está en términos de coseno, el primer petalo empieza en cero, excepto cuando $a < 0$.

5.10.4. Lemniscata

Son ecuaciones polares de la forma:

$r^2 = a^2\,\text{sen}(2\theta)$ y $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

En donde su gráfica solo contiene 2 hojas; en cada una de estas ecuaciones r varía de $-a$ hasta a y se incluyen los valores de que hace negativo el miembro derecho.

sus gráficas son:

Los valores excluidos en la primera ecuación son: $^{\pi} < \theta < \pi$

y

$^{3\pi} < \theta < 2\pi^{2}$

2

Los valores excluidos en la segunda ecuación son: $^{\pi} < \theta < ^{3\pi}$ y

$^{5\pi} < \theta < ^{7\pi\ 4\ 4}$

4 2

La segunda ecuación es conocida como la lemniscata de Bernoulli,

5.11. Ejercicios gráficas polares

1. Grafique cada una de las siguientes rectas polares, si es necesario, Asigne valores convenientes a θ

a.

r

=

1 5

–

2sen(θ)$^{c.}$ $^{r=}$ 10cos(θ)

b. r =$_{\cos(\theta)-}$^{3} d. r =$_{4\cos(\theta-}$^{8}

–6sen(θ)–)+4sen(θ)

2. Escriba la ecuación polar de cada recta

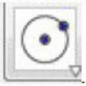
a. Recta horizontal que pasa por el punto P = (3; $^{\pi}$)$_{2}$ b. Recta vertical que pasa por el punto P = (–2; π)

3. Esboce cada una de las siguientes ecuaciones 5.11. EJERCICIOS GRÁFICAS POLARES 171

a. r = 2(1 + cos(θ)) e. r^2 = 9cos(2θ) b. r = 2 – 4sen(θ) f. r = 3(1-sen(θ)) c. r = –$_{5}$cos(3θ) g. r = 2cos(4θ) d. r = 4sen(θ) h. r^2 = 25cos(2θ)

Actividad con Software9

1. Cree una circunferencia C_1 con la herramienta circunferencia dado el centro y un punto



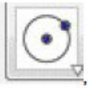
2. Haga clic derecho en el centro de esta circunferencia y en la opción de propiedades, marque la casilla objeto fijo.

3. Haga clic derecho en el punto B de la circunferencia y seleccione la opción muestra objeto.

4. Con la herramienta nuevo punto

, genere 2 puntos C y D sobre la circunferencia.

5. Con la herramienta circunferencia dado el centro y un punto

, cree una circunferencia C_2 entre los puntos C y D, de tal manera que uno de los puntos sea el centro.

6. El punto de intersección entre las circunferencias C_1 y C_2, déjelo como objeto fijo.

C D

A

7. Haga clic derecho sobre la circunferencia C_2 y seleccione la opción activa rastro

.

8. Seleccione la opción "elige y mueve"

y desplace el centro de la circunferencia C_2.

9. ¿Que gráfica genera al mover este centro?

5.12. Ecuaciones de secciones cónicas en coordenadas polares

Las ecuaciones polares de las secciones cónicas se pueden representar gracias a la propiedad foco-directriz, donde el foco esá ubicado en el polo y la directriz está a una distancia d del polo y, la propiedad conocida como excentricidad, entonces para cualquier punto P (r, θ) de la cónica, se tiene que:

Por definición, la distancia del foco al vértice equidista del vértice a la directriz, entonces:

$D_{PF} = eD_{PL}$

$r = e\,(d - r\cos(\theta))$

$r = e\,d - e\,r\cos(\theta)$

$r + e\,r\cos(\theta) = ed$

$r\,(1 + e\cos(\theta)) = ed$

$$r = \frac{ed}{1+e\cos(\theta)}$$

De modo similar, se define en términos del coseno, entonces la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares está dada por:

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}(\theta)} \quad y \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\cos(\theta)}$$

Dependiendo del valor e genera una sección cónica diferente:

– Si e = 1 representa una parábola.
– Si 0 < e < 1 representa una elipse.
– si e > 1 representa una hipérbola.

Ejemplo

Esboce la gráfica de las siguientes secciones cónicas

a. $$r = \frac{2}{1+3\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

b. $$r = \frac{6}{3+\cos(\theta)}$$

c. $$r = \frac{4}{1+\mathrm{sen}(\theta)}$$

Solución

a. Observemos que e = 3, como es mayor de cero, su gráfica es una hipérbola y la ecuación está en términos del seno, entonces es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar que pasa por el polo, por lo tanto los valores para el ángulo son 270° < θ < 90° y se hace la simetría correspondiente.

r 270° 300° 330° 0° 30° 60° 90° f(θ) −

1
−
1
,
25
−
4
2
4 0,55 1
5 2
b. La ecuación
r
=
6
3+cos(θ) se debe dividir entre tres (3) para saber
6
el valor de la excentricidad, entonces r =3 2 , co3+ cos(θ) ⇒ r
=1+1cos(θ) mo
e
=
1
3 3 3
, entonces la gráfica representa una elipse, al estar en términos 3
del coseno, los valores para el ángulo son 0∘ < θ < 180∘ y se hace la simetría correspondiente:

r 0∘ 30∘ 60∘ 90∘ 120∘ 150∘ 180∘ f (θ) 3 1,55 12 2 12 2,8 3 2 7 5

c. Observemos que e = 1, entonces, la gráfica es una parábola y la ecuación está en términos del seno, entonces es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar que pasa por el polo, por lo tanto, los valores para el ángulo son 270∘ < θ < 90∘ y se hace la simetría correspondiente: r 270∘ 300∘ 330∘ 0∘ 30∘ 60∘ 90∘

f (θ) N.E 30 8 4 8 2,14 2 3

5.13. Ejercicios secciones cónicas

1. Dibujar e identificar cada una de las siguientes secciones cónicas
a.
r

=
1 4
$2+6\cos(\theta)$ d. r = $2+2\cos(\theta)$
b.
r
=
1+2 sen
4 3
(θ) e. r = $1+^{1}\cos(\theta)_{1\ 2}$
c.
r
=
$_{2}$ 6
$2+3\cos(\theta)$ f. r = $2-2\text{sen}(\theta)$

5.14. Intersecciones entre gráficas polares

Las gráficas de ecuaciones polares se pueden intersecar en uno o varios puntos, teniendo en cuenta que no todos son solución. Para obtener las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas en coordenadas polares se deben igualar las ecuaciones y despejar el angulo θ, luego reemplazarlo en las funciones y así obtener los puntos, generalmente se debe guiar por las gráficas, ya que en este sistema, un punto no tiene una única coordenada.

Ejemplo

1. Encuentre los puntos de intersección de las ecuaciones siguientes y esboce las gráficas.

a. $r = 2 + 3\cos(\theta)$ y $r = 2 + 2\cos(\theta)$ b. $r = 2 + 3\cos(\theta)$ y $r = 2 + 2\text{sen}(\theta)$.

Solución

a. Armando el sistema y aplicando el método de reducción se tiene:

$r = 2 + 3\cos(\theta)$

$r = 2 + 2\cos(\theta)$ (-1)

$0 = \cos(\theta)$

Observe que la función coseno se hace cero en 90^{o} y en 270^{o}, entonces, se reemplaza el ángulo en cada una de las funciones.

$r = 2 + 3\cos(90^o) = 2$ estos ángulos salen por simetría, ya que $r = 2 + 2\cos(270^o) = 2$
ambas ecuaciones están en términos de la misma función.

Por lo tanto, el punto de intersección es $P_1 = (2, 90^o)$ y $P_2 = (2, 270^o)$

Para graficar las funciones, vemos que ambas están en términos de coseno, por lo tanto $0_\circ < \theta < 180_\circ$.

r $0_\circ$ $30_\circ$ $60_\circ$ $90_\circ$ $120_\circ$ $150_\circ$ $180_\circ$ $r = 2 + 3\cos(\theta)$ 5 $4{,}6^7$ 2^1 $0{,}6{-}1_{2\,2}$

$r = 2 + 2\cos(\theta)$
4
3
,
73
3
2
1
0
$^-,26_0$

b. Armando el sistema y aplicando el método de reducción se tiene $r = 2 + 3\cos(\theta)$

$r = 2 + 2\text{sen}(\theta)$ (-1) $0 = 3\cos(\theta) - 2\text{sen}(\theta)$

Entonces:

$2\text{sen}(\theta) = 3\cos(\theta)$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{3\cos(\theta)}{2}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{3}{2}$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{3}{2}$$

$\theta = 56,3^{o}$

Luego se reemplaza el ángulo en cada una de las funciones, entonces:

$r = 2 + 3\cos(56,3^{o}) = 3,66$ $r = 2 + 2\text{sen}(56,3^{o}) = 3,66$

por lo tanto, el punto de intersección es P = (3,66, 56,3) .

Para graficar las funciones, vemos que $r = 2 + 3\cos(\theta)$ estan en términos de coseno, por lo tanto, $0_{\circ} < \theta < 180_{\circ}$.

r $0_{\circ}$ $30_{\circ}$ $60_{\circ}$ $90_{\circ}$ $120_{\circ}$ $150_{\circ}$ $180_{\circ}$ $r = 2 + 3\cos(\theta)$ 5 $4,6^{7}$ 2^{1} $0,6_{-}1_{2\,2\,-}$

Para graficar las funciones, vemos que $r = 2 + 2\text{sen}(\theta)$ están en términos del seno, por lo tanto, $270_{\circ} < \theta < 90_{\circ}$.

r $270_{\circ}$ $300_{\circ}$ $330_{\circ}$ $0_{\circ}$ $30_{\circ}$ $60_{\circ}$ $90_{\circ}$ $r = 2 + 2\text{sen}(\theta)$ 0 0,27 1 2 3 3,73 4

5.15. Ejercicios intersección entre gráficas

1. Encuentre los puntos de intersección de las ecuaciones siguientes y esboce las gráficas en un mismo plano polar.

a. $r = 3\text{sen}(\theta)$ y $r = 3\cos(\theta)$

b. $r = 2$ y $r = 4\cos(\theta)$

c. $r = \text{sen}(\theta)$ y $r = \sqrt{3}\cos(\theta)$

d. $r\cos(\theta) = 4$ y $r\text{sen}(\theta) = 4$

5.16. CUESTIONARIO 177

5.16. Cuestionario

1. Las ecuaciones

r

=

ep ep

$1 \pm e\cos(\theta)$ y $r = 1 \pm e\text{sen}(\theta)$ representan:

a) Una parábola si e = 1, una elipse si e > 1 y una hipérbola si e < 1.

c) Una parábola si e = 1, una elipse si 0 < e < 1y una hipérbola si e > 1.

b) Una parábola si p = 1, una elipse si p > 1y una hipérbola si p < 1.

d) Una parábola si e < 1, una elipse si e > 1y una hipérbola si e = 1.

2. ¿Cuál de las siguiente gráficas representa la ecuación de trébol $r = -3\cos(5\theta)$?

a) b)

c) d)

3. La ecuación $r = 3^2 sen(2\theta)$ en coordenadas polares representa:

a) Un trébol de 2 hojas c) Una lemniscata

b) Un trébol de 4 hojas d) Un limacón

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa esta gráfica?:

a) $r = -1 + 2sen(\theta)$ b) $r = 1 + 2sen(\theta)$ c) $r = -1 - 2sen(-\theta)$ d) $r = 1 - 2sen(\theta)$ 5. Si la ecuación no se modifica al sustituir θ por $-\theta$, la curva es simétrica respecto a

a) El eje polar b) El polo

c) La perpendicular al eje polar d) r y θ

y pasa por el polo

6. La gráfica de una ecuación en coordenadas polares es el conjunto de todos los puntos (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen:

a) $r = x^2 + y^2$ b) $r = a \pm bsen(n\theta)$ y $r = a \pm bcos(n\theta)$; $n > 0$

c) $r = f(\theta)$

d) $r = \frac{ep}{1 \pm ecos(\theta)}$ y $r = \frac{ep}{1 \pm esen(\theta)}$

CAPÍTULO 6

SOLUCIONES

6.1. Capítulo 2

Actividad No. 1

Pueblo Tapao

$M = -\frac{4}{3}, \frac{}{2}$

2. El recorrido por estos municipios es 10,2 kms.

3. El camino más corto es La Tebaida, Pueblo Tapao, Montenegro que mide 3,16 kms, mientras que La Tebaida, Armenia, Montenegro mide 4,5 kms.

Actividad No. 2

1. Las coordenadas de los mu4. Estaria en el municipio de Calarcá y

la coordenada es $^{3\ 11}$ P =^{1}

$-4,\ ^{3}\ \cdot 4$

nicipios son:

Génova A= −2 − ^{2}Pijao B = (1,

3 5 1

La Tebaida E =

$_{-}$3)

Buenavista C =$_{-2,-2}$ Cordoba D =^{3}$_{,-22\ 5,\ 1}$

Calarcá

F

=

1$_{,}$ 3-^{2} 2 2

Armenia G = (−1, 2) Montenegro

H

=

7

−$_{2}$, 3 Quimbaya

I

=

−

3

,

11 2

Circasia

J

=

1

-2$^{,\ 4}$

Salento K = (3, 5)

Filandia L = (1, 7)

2.2.5 Ejercicios entre puntos

1. Determine en qué cuadrante están los siguientes puntos:
    a. El Punto A esta en el II cuadrante.
b. El Punto B esta en la parte positiva del eje y.
179 c. El Punto C esta en el I cuadrante.
    d. El Punto D esta en la parte negativa del eje x.
e. El Punto E esta en el IV cuadrante.

f. El Punto F esta en el III cuadrante.
2. Coordenadas de los puntos en el plano son:
A = (1, 2) F = B =−2, 3 (−1,−1)2
C = (2,−2) G =
D
= (3
,
0)
5
−
2,−2
E = (0,−3)
3. Distancia entre puntos a. La pendiente de la recta b. las abcisas y las ordenadas
c.
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
d. La pendiente es indeterminada
e. No hay pendiente debia a que
la pendiente es cero
f. Dos puntos y se utiliza la fór
mula de punto pendiente
2. los puntos que pertenecen a la recta son:
B = (−1, 1) y C = (3, 2)
3. los puntos que pertenecen a la recta son:
E = (1, 3) y H = (−1, 1)
4. Las pendientes son:
a. 15 u.m c. 6.04 u.m b. 7.62 u.m d. 9 u.m a. m = 1
b. m = 2
c.
$$m = \frac{1}{-2}$$
d. m = indeterminada 4. Los puntos son P_1 = (−1,93, 2) y P_2 = (11,93, 2)

5. Los puntos son $B_1 = (8, 9{,}8)$ y $B_2 = (8, 0{,}2)$
6. La distancia P A y P B es 5 y la distancia P C es 5,1
7. Los puntos son $P_1 = (2, 3)$ y $P_2 = (-4, 5)$
8. Llega primero el barco que esta en la posción B.
2.3.10 Ejercicios Línea Recta
1. Responda en cada uno de los casos
2.3.15 Ejercicios Propuestos de Triángulos
1. El área de la región sombreada es
$\frac{25}{4}$
2. Los vértices de los triángulos son:
a. $A = (1, -8)$, $B = (9, 0)$ y $C = (-1, 4)$
b. $A = (9, -2)$, $B = (-5, -4)$ y $C = (1, 6)$
3. El vértice faltante es C =
$\left(\frac{174}{25}, \frac{18}{5}\right)$
4. Se clasifican en:
a. El triángulo es isósceles ya que el lado a y b miden 4.7 y es rectangulo porque el ángulo ABC mide 90^o
b. El triángulo es escaleno pues la medida de sus lados es diferente, donde a = 5, b = 5,85 y c = 6,5 y es acutángulo debido a que sus el ángulo miden menos de 90^o, donde ABC = 59,49, BCA = 73,11 y CAB = 47,4
c. El triángulo es equilatero ya que todos los lados son iguales a 10 y es acutángulo ya que sus angulos son iguales a 60^o
d. El triángulo es escaleno debido a que sus lados son desiguales, donde a = 2,24, b = 1,58 y c = 3,54 y es obtusángulo ya que hay un ángulo mayor a 90^o, donde ABC = 18,4, BCA = 135 y CAB = 26,6
5. La longitud de las medianas son: a = 6,7, b = 8,5 y c = 9 6. La coordenada del ortocentro es $O = (-3, 4)$
Actividad general
1. El perímetro se encuentra hallando las distancias entre las patrullas y sumándolas, entonces, el perímetro es ___ y el área se

encuentra a través del triángulo que forman las patrullas el cual es: ___

2. Para determinar la distancia de la niña a la moto, se debe hacer distancia de un punto a una recta, pues se conoce la ubicación de la niña y la ecuación de la carrera 8, entonces dicha distancia es____

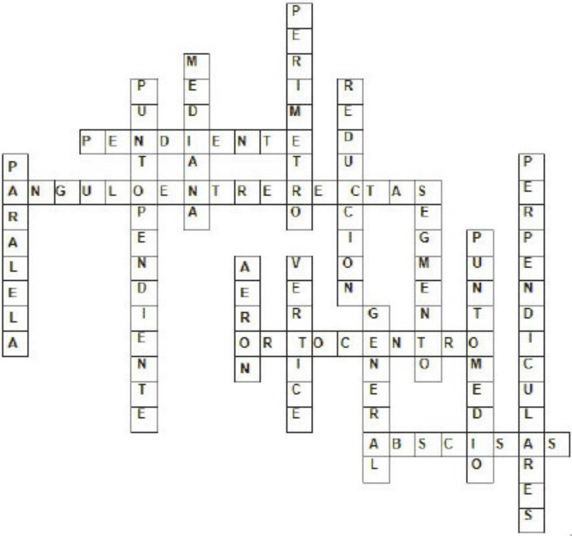
4. La carrera 8 y la carrera 6 son paralelas, es decir, que tienen la misma ecuación pero difieren en el término independiente y, ya se tiene la distancia entre ellas, se puede utilizar la distancia entre 2 rectas paralelas para encontrar el valor c entonces la carrera 6 tiene por ecuación______

5. En este caso se puede utilizar la ecuación de punto medio entre las patrullas, el cual da la coordenada P_m(), lo que muestra que hay un estadio

6. Para encontrar la coordenada exacta podemos utilizar la ecuación de relación que divide un segmento dado, por consiguiente la posición del vehículo sospechoso es ___

7. La pendiente de la calle 4 se puede encontrar con el carro de policía y la bicicleta, y la calle 5 es paralela a la calle 6, o sea que se tiene la misma pendiente, con estos datos se puede decir que el ángulo formado por estas calle es _____

3. Observe que la calle 6 es perpendicular a la carrera 8 y se tiene la coordenada de la patrulla 3, aplique la ecuación de punto pendiente, entonces la ecuación de la calle 6 es Crucigrama unidad 2



A B C D

1
2
3
4
5
6
7
8
9
Cuestionario unidad 2_{10}

6.2. Capítulo 3

3.1.5 Ejercicios circunferf. $x^2 + y^2 + 10x + 10y - 112 = 0$
encia g. $x^2 + y^2 + 6x + 14y - 10 = 0$

1. Completar:

3. Reduzca la general a la fora. Una circunferencia es real ma canónica.
cuando: El radio es mayor de cero, imaginaria cuando El radio es mayor de cero o un punto si El radio es cero.

b. La ecuación gener al de la circunferencia es:
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, de
a. $x^2 + (y + 5)^2 = 12,5$ b. $(x + 10)^2 + (y + 8)^2 = 904$ c. $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 180$ d. $(x + 20)^2 + (y - 10)^2 = 2000$.

allí decimos que el centro es 4. La ecuación representa:
D , B
-2 y el radio esta dado por$-2 \sqrt{D2+E2}\, 4fr = 2 -$

c. La cuerda mayor que se pue de trazar en una circunferencia se
a. Un punto
b. Una circunferencia Real c. Una circunferencia imaginar[ia]denomina Diametro.
d. Una circunferencia imagi2. Encuentre la ecuación gennaria eral de la circunferencia

5. Ecuación de la recta tangena. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ ta
b. $x^2+y^2\ x_{-0,}4y-35,71 = 0$
c. $x^2 + y^{2-}$ a. $x = 1 + 16x + 7_y + 70 = 0$
d. $x^2 + y^2\ 8x-5y-26,75 = 0$ b. $x + 3y - 8 = 0$
e.
x
$^2 + y^{2-}\ 4x + 2_{y-}\ 60 = 0$ c. $y =^3$
$_-2_-$
d. $4x + 3y - 4 = 0$
6. La ecuación de la cuerda es $x - y = 5$.
7. La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2\ 10x-12y-4 = 0_-$
8. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2\ x - y - 8 = 0._-$

9. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 2x - 5y = 0$

17. El área del triángulo es 21 $(u.m)^2$

Ejercicios aplicación de la parábola

3.la ecuación del puente es $x^2 = 80 (y - 20)$y, los puntos de an-$_{chaje}$
son P1 = (−60,−25) y P2 =
(60,−25)

Ejercicios hipérbola con centro en el origen

1. $a^{x2\ y2} = 1$
b.

y
2
5 +4
$+ ^{x2} = 1_{36\ 4}$
c. $y2\ x2 = 11 + 42 = 1,_{16} + ^{y}3.\ ^{x2}$

9

Activ idad general Cuestionario

A B C D

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

6.3. Capítulo 4

4.2 Ejercicios traslación

1 ecuación de traslación en términos de x y y a. $^{x2\ y2} = 1$, donde h =
−2 y k = $-3_{4\ -\ 9}$

4.5.1 Ejercicios identif icación de cónicas

d. es una y se degenera en 2 rectas cuy a ecuaciones son: x − y − 4
y x − y − 2

Cuestionario

A B C D

1
2
3
4
5
6

6.4. Capítulo 5

Activ idad
5.4 Ejercicios puntos en polares 4. el área del triángulo es 10
5.12 Ejercicios secciones cónicas
a. Elipse,
e
=
1 2
b. Hipérbola,
e
= 2
c. Hipérbola, e =
3 2
e. elipse,
e
=
1 2
d. Parábola, e = 1 f. Parábola, e = 1
5.14 Intersección entre gráf icas
a.
P
=
2
,
12 ,
π 4
b. $P_1 = (2, 60^o)$y $P_2 = (-2, 120^o)$ Cuestionario

A B C D

1
2
3
4
5
6

BIBLIOGRAFÍA

[1] ARISTIZÁBAL Z, Jorge H. Potencialidad y movilidad del conocimiento desde las comunidades virtuales como horizontes emergentes de con-formación del sujeto implicado, Universidad Católica de Manizales, 2009.
[2] BRUÑO, Geometría Curso Superior. Felix de Beducut, Tercera edición, 1978.
[3] FLEMING, Walter y Dale Varberg. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Prentice Hall. Tercera edición, 1991. [4] FULLER, Gordon y Dalton Tarwater. Geometría Analítica, Pearson Educación, Septima edición, 1999.
[5] KINDLE Joseph H. Geometria analítica, McGraw-Hill, Primera edición, México, 2001.
[5] LEHMANN, Charles H. Geometría Analítica, LIMUSA, 1a edición, México, 1995.
[6] SPRINGER - Verlag. Balacheff, N. & Kaput, J. Computer-based learning environments in mathematics. In A (1996).
[7] STEWAR, James y Redlin Lothar. Watson Saleem. Precálculo, Thomson, 5ta edición, 2007.
[6] VIEDMA, C. Juan A. Introducción a la Geometría Analítica. Bogotá: Norma, Segunda edición, 1977.
[8] WOOTON William. Beckenbach Edwin. Fleming Frank J. Modern Analytic Geometry, Publicaciones culturales S.A, 2a edición. 1979.
[8] http://www.geogebra.org
187 188 BIBLIOGRAFÍA
[9] http://www.solarsystemscope.com/ [9] http://publicalpha.com/%C2 %BFque-es-el-software-educativo/

Geometría Analítica

con Aplicaciones usando Software Dinámico

La Geometría Analítica proporciona herramientas para tratar múltiples problemas en las ingenierías, puesto que debe indagar sobre las ecuaciones que corresponden a curvas definidas por alguna propiedad.

En un curso de Geometría Analítica, se dedica buen tiempo a la solución de ejercicios, dejando las aplicaciones que son de gran utilidad al final del curso. Este libro, por el contrario, está diseñado con material apropiado donde se mezcla la intuición, el rigor y los problemas de aplicación en cada capítulo.

En este libro encontrará problemas de aplicación, cuestionarios, software educativo, actividades con software y prácticas.

ISBN: 978-958-44-7895-5

9 789584 478955